UMBERTO CISOTTI

LEZIONI

DI

CALCOLO TENSORIALE

1928
LIBRERIA EDITRICE POLITECNICA
DI CESARE TAMBURINI FU CAMILLO
MILANO

UMBERTO CISOTTI
Professore di Meccanica razionale del R. Politecnico
e di Meccanica superiore della R. Università di Milano

LEZIONI
DI
CALCOLO TENSORIALE

1928
LIBRERIA EDITRICE POLITECNICA
DI CESARE TAMBURINI FU CAMILLO
MILANO
Via G. Pascoli, 64 Piazza Cavour, 2

Pavia — TIPOGRAFIA COOPERATIVA, Piazza Botta — Pavia

PREFAZIONE

Ho chiuso quest' anno il Corso di Meccanica Razionale al R. Politecnico milanese con alcune lezioni di Calcolo Tensoriale applicato alla Meccanica che, per il loro carattere elementare, mi sembrano la più adatta iniziazione a studi di questo genere.

Ho reputato utile raccoglierne il contenuto in queste pagine (Cap. I-IV) ed aggiungervi una piccola parte (Cap. V-VI) di concetti, svolti nel Corso di Meccanica Superiore alla R. Università, che venivano naturalmente a connettersi coll' argomento. Il contenuto di questi due ultimi capitoli può, per la massima parte, estendersi anche a varietà non euclidee a multidimensioni; ho però preferito non fare alcun cenno di ciò per conservare il carattere elementare intuitivo che mi sono imposto. Coloro che intendessero approfondire questo ordine di studi possono rivolgersi ulteriormente alle seguenti opere:

LEVI-CIVITA: *Lezioni di Calcolo Differenziale Assoluto* - Stock, Roma, 1925 (trad. inglese: Blackie e Son, Glasgow, 1927; trad. tedesca: Springer, Berlin, 1928).

LEVI-CIVITA: *Fondamenti di Meccanica Relativistica* - Zanichelli, Bologna, 1928.

MARCOLONGO: *Relatività* (seconda ediz.) Principato, Messina, 1923.

BIRKHOFF: *Relativity and Modern Physics* - Harvard University Press, Cambridge, 1927.

EDDINGTON: *The Mathematical Theory of Relativity* (seconda ediz.) University Press, Cambridge, 1924.

GALBRUN: *Introduction à la théorie de la relativité* - Gauthier-Villars, Paris, 1923.

JUVET: *Introduction au Calcul Tensoriel et au Calcul Différentiel Absolu* - Blanchard, Paris, 1922.

MARAIS: *Introduction géometrique à l'étude de la relativité* - Gauthier-Villars, Paris, 1923.

SCHOUTEN: *Der Ricci-Kalkül* - Springer, Berlin, 1924.

WEYL: *Raum-Zeit-Materie* (quinta ediz.) Springer, Berlin, 1923.

WEYL: *Mathematische Analyse des Raumproblems* - Springer, Berlin, 1923.

Ho posto in Appendice un'esposizione fatta ad un'adunanza del Sindacato Provinciale Fascista Ingegneri di Milano; essa ha carattere divulgativo e potrebbe figurare come prefazione a queste pagine.

Alcuni richiami del testo si riferiscono alle mie Lezioni di Analisi Matematica e di Meccanica Razionale.

Vipiteno, Settembre 1928.

UMBERTO CISOTTI

INDICE

Capitolo I.

Tensori.

Capitolo II.

Operazioni sui tensori.

Capitolo III.

Tensori variabili. - Derivazione.

Capitolo IV.

Applicazioni alla Meccanica.

Capitolo V.

Rappresentazione dei tensori in coordinate generali.

Capitolo VI.

Applicazioni. - Rappresentazione intrinseca dei tensori.

APPENDICE

CAPITOLO I.

Tensori

1. - **Coordinate di un punto.** — Sia O, y_1, y_2, y_3 un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e corrispondentemente sieno y_1, y_2, y_3 le coordinate di un punto dello spazio, comunque prescelto. Sia $\overline{O}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ un altro sistema di riferimento, scelto ad arbitrio; dette $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le coordinate di $\overline{O}$ rispetto alla terna di riferimento primitiva e indicando con α_{ik} il coseno dell'angolo di y_i con $\overline{y}_k$, cioè ponendo:

$$\alpha_{ik} = \cos(y_i \overline{y}_k),$$

le coordinate $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ del punto prescelto, rispetto alla seconda terna di riferimento, sono legate a y_1, y_2, y_3 nel seguente modo, come insegna la geometria analitica:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11}\overline{y}_1 + \alpha_{12}\overline{y}_2 + \alpha_{13}\overline{y}_3 , \\ y_2 &= \alpha_2 + \alpha_{21}\overline{y}_1 + \alpha_{22}\overline{y}_2 + \alpha_{23}\overline{y}_3 , \\ y_3 &= \alpha_3 + \alpha_{31}\overline{y}_1 + \alpha_{32}\overline{y}_2 + \alpha_{33}\overline{y}_3 . \end{aligned}$$

Sarà molto utile ora e nel seguito di sintetizzare le precedenti formule di trasformazione, scrivendo una sola relazione in questo modo:

$$y_i = \alpha_i + \sum_{1}^{3}{}_k \overline{y}_k \alpha_{ik} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

I nove coseni α_{ik}, che caratterizzano l'orientamento reciproco delle due terne di riferimento sono, come è noto, legati tra di loro dalle sei relazioni di ortogonalità che si possono esprimere nel seguente modo:

$$\sum_1^3{}_i\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} = \cos(\overline{y}_h \overline{y}_k) = \delta_{hk} = \begin{cases} 0 \text{ per } h \neq k, \\ 1 \text{ per } h = k; \end{cases} \tag{2}$$

oppure anche nel seguente:

$$\sum_1^3{}_i\, \alpha_{hi}\, \alpha_{ki} = \cos(y_h y_k) = \delta_{hk}. \tag{2'}$$

Le formule (1) definiscono esplicitamente le y_i in funzione delle $\overline{y}_k$, viceversa si ottengono quest'ultime in funzione delle prime nel seguente modo:

$$\overline{y}_h = \sum_1^3{}_i\, (y_i - a_i)\, \alpha_{ih}. \tag{1'}$$

È facile di ricavare le (1') dalle (1) seguendo questo procedimento, che è di uso frequente nel calcolo tensoriale: trasportato a_i nel primo membro, si moltiplichino i due membri della relazione risultante per α_{ih} indi si sommi rispetto a i. Si ottiene successivamente, tenendo conto di (2):

$$\sum_1^3{}_i\, (y_i - a_i)\, \alpha_{ih} = \sum_1^3{}_{ik}\, \overline{y}_k\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} = \sum_1^3{}_k\, \overline{y}_k \sum_1^3{}_i\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} = \sum_1^3{}_k\, \overline{y}_k\, \delta_{hk} = \overline{y}_h,$$

che sono appunto le (1').

2. - **Componenti di un vettore.** — Sia V un vettore, designino V_i le componenti del vettore rispetto alla prima terna e $\overline{V}_k$ le componenti rispetto alla seconda terna; tra queste componenti hanno luogo le seguenti relazioni:

$$V_i = \sum_1^3{}_k\, \overline{V}_k\, \alpha_{ik} \tag{1}$$

e le equivalenti:

$$\overline{V}_h = \sum_1^3{}_i\, V_i\, \alpha_{ih}. \tag{1'}$$

Facilmente si passa dalle une alle altre seguendo il procedimento sopra indicato [N. 1] per le coordinate di un punto. Per esempio, per ricavare le (1') dalle (1) basta moltiplicare i due membri di (1) per α_{ih} indi sommare rispetto all'indice i, tenendo presenti le (2) del numero precedente, si ottiene successivamente:

$$\sum_1^3{}_i\, V_i\, \alpha_{ih} = \sum_1^3{}_{ik}\, \overline{V}_k\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} = \sum_1^3{}_k\, \overline{V}_k \sum_1^3{}_i\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} = \sum_1^3{}_k\, \overline{V}_k\, \delta_{hk} = \overline{V}_h$$

e quindi le (1').

È interessante di rilevare che dalle formule precedenti si deduce la seguente relazione:

$$\sum_1^3{}_i\, V_i^2 = \sum_1^3{}_k\, \overline{V}_k^2 ,$$

la quale dice che *la somma dei quadrati delle componenti cartesiane di un vettore è un invariante, cioè è indipendente dal sistema di riferimento.*

Questa proprietà è ben manifesta se si pensa al significato di somma dei quadrati delle componenti cartesiane di un vettore, cioè il quadrato del suo modulo. Tuttavia è istruttivo farne la constatazione formale.

Basta a tal uopo osservare che si può scrivere:

$$V_i^2 = \left(\sum_1^3{}_k\, \overline{V}_k\, \alpha_{ik}\right) \left(\sum_1^3{}_h\, \overline{V}_h\, \alpha_{ih}\right) = \sum_1^3{}_{hk}\, \overline{V}_h\, \overline{V}_k\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} ,$$

sommando rispetto a i e scomponendo le sommatorie del secondo membro nel modo sotto indicato e, tenendo infine presenti le (2) del numero precedente, si ottiene:

$$\sum_1^3{}_i\, V_i^2 = \sum_1^3{}_{ihk}\, \overline{V}_h\, \overline{V}_k\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} = \sum_1^3{}_{hk}\, \overline{V}_h\, \overline{V}_k \sum_1^3{}_i\, \alpha_{ih}\, \alpha_{ik} = \sum_1^3{}_{hk}\, \overline{V}_h\, \overline{V}_k\, \delta_{hk} = \sum_1^3{}_h\, \overline{V}_h^2 ,$$

che è appunto la formula che esprime la invarianza in discorso.

3. - **Prodotto tensoriale di due vettori.** — Sieno $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ due vettori; V_i e W_k le corrispondenti componenti cartesiane, rispetto al primo sistema (y_i) e $\overline{V}_i$ e $\overline{W}_k$ le componenti rispetto al secondo sistema di riferimento $(\overline{y}_i)$.

Si hanno, oltre le (1) e (1') del numero precedente, ancora le seguenti relazioni:

$$W_i = \sum_1^3{}_k\, \overline{W}_k\, \alpha_{ik} , \qquad \overline{W}_h = \sum_1^3{}_i\, W_i\, \alpha_{ih} .$$

Si considerino i prodotti:

$$(1) \qquad Z_{hk} = V_h\, W_k \qquad (h, k, = 1, 2, 3).$$

Di fronte al passaggio dal primo sistema di riferimento (y_i) al secondo $(\overline{y}_k)$, ponendo:

$$\overline{Z}_{ij} = \overline{V}_i \, \overline{W}_j, \tag{2}$$

si ottiene:

$$Z_{hk} = \sum_{1}^{3}{}_{ij} \, \overline{Z}_{ij} \, \alpha_{hi} \, \alpha_{kj} \tag{3}$$

e le equivalenti:

$$\overline{Z}_{ij} = \sum_{1}^{3}{}_{hk} \, Z_{hk} \, \alpha_{hi} \, \alpha_{kj} . \tag{3'}$$

Infatti, avendosi per le (1) del N. 2,

$$V_h = \sum_{1}^{3}{}_i \, \overline{V}_i \, \alpha_{hi} , \qquad W_k = \sum_{1}^{3}{}_j \, \overline{W}_j \, \alpha_{kj},$$

moltiplicando membro a membro, si ottiene:

$$V_h \cdot W_k = \sum_{1}^{3}{}_{ij} \, \overline{V}_i \, \overline{W}_j \, \alpha_{hi} \, \alpha_{kj}$$

e, per la (1) e la (2), si ha la (3). In modo analogo si dimostra la (3').

Le nove quantità Z_{hk}, definite mediante le relazioni (1), si diranno le *componenti cartesiane del tensore doppio* $\boldsymbol{Z}$, rispetto alla prima terna (y_i); $\boldsymbol{Z}$ si chiama il *prodotto tensoriale* dei due vettori $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$.

Le formule (3) e (3') esprimono le relazioni che legano tra di loro le componenti cartesiane dello stesso tensore $\boldsymbol{Z}$ riferito alle due differenti terne di riferimento.

In generale le nove componenti del tensore $\boldsymbol{Z}$ sono distinte, vi è però un caso particolare notevole, che ora esamineremo, in cui si riducono a sole sei distinte.

4. - **Quadrato tensoriale di un vettore.** — Si tratta del caso in cui $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}$; allora la (1) del numero precedente diviene:

$$Z_{hk} = V_h \, V_k .$$

Si ha dunque $Z_{hk} = Z_{kh}$ e il tensore $\boldsymbol{Z}$ ha solamente sei componenti distinte: il tensore dicesi allora *simmetrico* e rappresenta il *quadrato tensoriale* del vettore $\boldsymbol{V}$.

Si rilevi che se si considera il determinante

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}$$

formato colle nove componenti del tensore $\boldsymbol{Z}$, nel caso in cui $\boldsymbol{Z}$ è il quadrato tensoriale del vettore $\boldsymbol{V}$ il predetto determinante è simmetrico, cioè risultano eguali i termini simmetricamente disposti rispetto alla diagonale principale.

5. - **Prodotto tensoriale di m vettori.** — Sieno ora $\boldsymbol{V}'$, $\boldsymbol{V}''$, ... $\boldsymbol{V}^{(m)}$ m vettori di componenti cartesiane V_{i_1}', V_{i_2}'', ... $V_{i_m}^{(m)}$ rispetto alla prima terna (y_i). Poniamo:

$$(1) \qquad T_{i_1 i_2 \ldots i_m} = V_{i_1}' \ldots . V_{i_m}^{(m)}.$$

Passando dal sistema di riferimento (y_i) al sistema $(\overline{y}_k)$, col porre:

$$(2) \qquad \overline{T}_{j_1 j_2 \ldots j_m} = \overline{V}_{j_1}' \ldots . \overline{V}_{j_m}^{(m)},$$

si ottiene:

$$(3) \qquad T_{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{j_1 \ldots j_m} \overline{T}_{j_1 \ldots j_m} \alpha_{i_1 j_1} \ldots . \alpha_{i_m j_m}$$

e le equivalenti:

$$(3') \qquad \overline{T}_{j_1 \ldots j_m} = \sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_m} T_{i_1 \ldots i_m} \alpha_{i_1 j_1} \ldots . \alpha_{i_m j_m}.$$

Infatti, avendosi [N. 2]

$$V_{i_1}' = \sum_1^3{}_{j_1} \overline{V}_{j_1}' \alpha_{i_1 j_1}, \quad \ldots\ldots \quad V_{i_m}^{(m)} = \sum_1^3{}_{j_m} \overline{V}_{j_m}^{(m)} \alpha_{i_m j_m},$$

moltiplicando membro a membro si ottiene:

$$V_{i_1}' \ldots . V_{i_m}^{(m)} = \sum_1^3{}_{j_1 j_2 \ldots j_m} \overline{V}_{j_1}' \ldots . \overline{V}_{j_m}^{(m)} \alpha_{i_1 j_1} \ldots . \alpha_{i_m j_m},$$

e, per (1) e (2), risulta la (3). In modo analogo si dimostra la (3').

Le quantità $T_{i_1 \ldots i_m}$ sono tante quante sono le disposizioni con ripetizione a m a m degli indici 1, 2, 3, cioè 3^m.

Esse si diranno le *componenti cartesiane del tensore* m^{plo} $\boldsymbol{T}$ rispetto alla terna (y_i). Il tensore stesso dicesi *prodotto tensoriale* dei vettori $\boldsymbol{V}'$, $\boldsymbol{V}''$ .... $\boldsymbol{V}^{(m)}$. Le formule (3) e (3') danno le relazioni che legano tra di loro le componenti cartesiane dello stesso tensore $\boldsymbol{T}$ riferito a terne cartesiane differenti. In generale le 3^m componenti del tensore $\boldsymbol{T}$ sono distinte, faremo rilevare ora un caso notevole in cui il numero delle componenti distinte si riduce a $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

6. - **Potenza m^{ma} tensoriale di un vettore.** — È il caso in cui si ha:

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}'' = \ldots . \boldsymbol{V}^{(m)} = \boldsymbol{V}.$$

In tale caso la (1) del numero precedente diviene:

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_m} = V_{i_1} \cdot V_{i_2} \ldots . V_{i_m}.$$

Poichè permutando comunque i fattori del secondo membro il prodotto indicato non muta, risultano identiche tutte le componenti che differiscono solamente per l'ordine degli indici; pertanto il numero delle componenti distinte eguaglia quello delle combinazioni con ripetizione a m a m degli indici 1, 2, 3, cioè:

$$\binom{m+2}{m} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

In tal caso il tensore $\boldsymbol{T}$ dicesi *simmetrico* e rappresenta la potenza tensoriale m^{ma} del vettore $\boldsymbol{V}$.

7. - **Tensore.** — Assegnate 3^m quantità $T_{i_1 \ldots i_m}$, dove $i_1\, i_2 \ldots . i_m$ rappresenta una generica disposizione con ripetizione di 1, 2, 3, e un sistema di riferimento cartesiano (y_i) si dirà che esse — *componenti cartesiane* — definiscono cartesianamente un *tensore* m^{plo} $\boldsymbol{T}$. Passando ad altro sistema di riferimento $(\overline{y}_k)$ le componenti dello stesso tensore $\boldsymbol{T}$ risultino definite mediante le primitive a norma delle (3') del N. 5. Viceversa le componenti rispetto al sistema (y_i) risultino espresse mediante le altre dalle relazioni (3) del N. 5. Si rilevi la natura lineare e omogenea, espressa dalle citate formule (3) e (3') del N. 5, tra componenti di uno stesso tensore riferito a terne diverse: in particolare, se sono nulle le componenti di un tensore, rispetto a una delle terne, sono nulle anche le componenti secondo qualsiasi altra terna: caratteristica questa di un tensore *nullo*.

Per $m = 1$ si ha la rappresentazione cartesiana di un vettore, che in questa teoria si comporta come un *tensore semplice*. Un esempio di tensori m^{pli} ci è offerto dal prodotto tensoriale di m vettori [N. 5], altri esempi daremo tra poco. Un tensore dicesi *simmetrico* quando risultano identiche le componenti che differiscono soltanto per l'ordine degli indici; il numero delle componenti distinte diminuisce a $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ come si è visto nel caso particolare della potenza m^{ma} tensoriale di un vettore [N. 6].

Un tensore dicesi *emisimmetrico* se è tale che lo scambio di due indici qualunque porta al cambiamento di segno della componente; in particolare sono nulle le componenti con indici non tutti distinti.

Per $m = 0$ si ha una sola componente, in tal caso si conviene di dire che il *tensore è di ordine zero.*

8. - **Tensore fondamentale o unitario.** — Chiamasi *fondamentale* o *unitario* il tensore doppio simmetrico Δ le cui componenti cartesiane δ_{ik} sono definite nel seguente modo:

$$\delta_{ik} = 0 \text{ per } i \neq k, \qquad \delta_{ik} = 1 \text{ per } i = k. \tag{1}$$

Lo specchio di queste componenti è rappresentato dal determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Gli elementi della prima riga di questo determinante, quelli della seconda e quelli della terza si possono interpretare come componenti dei tre vettori unitari fondamentali, cioè dei vettori orientati come gli assi del sistema cartesiano di riferimento.

Il tensore Δ gode della notevole proprietà che *le sue componenti sono invarianti*, cioè sono indipendenti dal sistema cartesiano di riferimento, il che si esprime scrivendo:

$$\overline{\delta}_{ik} = \delta_{ik}.$$

Infatti, applicando le formule di trasformazione (3') del N. 5, che per un tensore doppio coincidono colle (3') del N. 3, si ha:

$$\overline{\delta}_{ik} = \sum_{jh}^{3}{}_{1} \delta_{jh} \alpha_{ji} \alpha_{hk};$$

tenendo conto delle (2), e delle (2') del N. 1, si ha successivamente:

$$\overline{\delta}_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{j} \delta_{jj} \alpha_{ji} \alpha_{jk} = \sum_{1}^{3}{}_{j} \alpha_{ji} \alpha_{jk} = \delta_{ik},$$

come si era asserito.

La proprietà rilevata mette in rilievo il carattere assoluto del tensore fondamentale Δ.

9. - **Il tensore** E. — Un altro tensore notevole, che presenta pure carattere assoluto, è il tensore triplo, emisimmetrico E le cui componenti ε_{ijk} sono definite nel modo seguente:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 0 \text{ se gli indici } i, j, k \text{ non sono tutti distinti,} \\ \varepsilon_{ijk} = (-1)^c \text{ essendo } c \text{ pari o dispari insieme alla} \\ \qquad\qquad \text{classe della sostituzione } \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Delle 27 componenti, che competono in generale a un tensore triplo, per il tensore E solamente 6 sono diverse da zero, tante essendo le permutazioni di 1, 2, 3, le altre 21 sono tutte nulle. Trattasi manifestamente di un tensore emisimmetrico [N. 7].

Anche il tensore E gode della proprietà già rilevata pel tensore Δ [N. 8] di avere componenti *invarianti*, cioè:

$$\overline{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}.$$

Infatti, applicando la (8′) del N. 5 alle componenti del tensore E si ha:

$$\overline{\varepsilon}_{ijk} = \sum_{1}^{3}{}_{pqr}\, \varepsilon_{pqr}\, \alpha_{pi}\, \alpha_{qj}\, \alpha_{rk};$$

ma le ε_{pqr} con indici non tutti distinti sono nulle; riferendosi quindi ai soli indici distinti, per le (1) si ha

$$\overline{\varepsilon}_{ijk} = S_{pqr}\, (-1)^c\, \alpha_{pi}\, \alpha_{qj}\, \alpha_{rk},$$

intendendosi di rappresentare S_{pqr} la somma estesa a tutti i termini che si possono ottenere applicando a p, q, r tutte le 6 permutazioni di 1, 2, 3. Il secondo membro è lo sviluppo del determinante [An. Mat. N. 15]

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{1j} & \alpha_{1k} \\ \alpha_{2i} & \alpha_{2j} & \alpha_{2k} \\ \alpha_{3i} & \alpha_{3j} & \alpha_{3k} \end{vmatrix}.$$

Se gli indici i, j, k non sono tutti distinti, il determinante, avendo almeno due colonne eguali, è nullo [An. Mat. N. 17, 7°], se sono tutti distinti rappresenta il determinante che si ottiene dal seguente:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

eseguendo sulle colonne la sostituzione

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

per cui risulta $= \pm 1$, valendo il segno $+$ oppure il segno $-$ secondo che la classe della sostituzione accennata è pari oppure dispari [An. Mat. N. 17, 4°], si ha dunque per le (1),

$$\bar{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}, \qquad \text{c. v. d.}$$

Ancor qui, come già pel tensore Δ [N. 8], si rilevi il carattere assoluto delle componenti cartesiane del tensore E.

Questa proprietà dei tensori Δ e E non trova riscontro nei vettori e, in generale, negli altri tensori.

Essa fa pensare che i tensori Δ e E si trovano nelle stesse condizioni di una sfera la quale risulta egualmente orientata rispetto a una qualunque terna cartesiana coll' origine nel suo centro.

CAPITOLO II.

Operazioni sui tensori

10. - **Somma**. — Sieno $X_{i_1 \ldots i_m}$ le componenti cartesiane di un tensore m^plo^ $\boldsymbol{X}$ e $Y_{i_1 \ldots i_m}$ quelle di un altro tensore, pure m^plo^, $\boldsymbol{Y}$. Poniamo:

$$(1) \qquad Z_{i_1 \ldots i_m} = X_{i_1 \ldots i_m} + Y_{i_1 \ldots i_m} .$$

Passando dal sistema di riferimento (y_i) al sistema $(\overline{y}_i)$ si ottengono le relazioni:

$$(2) \qquad Z_{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3 {}_{j_1 \ldots j_m} \overline{Z}_{j_1 \ldots j_m} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} ,$$

e le equivalenti

$$(3) \qquad \overline{Z}_{j_1 \ldots j_m} = \sum_1^3 {}_{i_1 \ldots i_m} Z_{i_1 \ldots i_m} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} ,$$

essendo

$$(4) \qquad \overline{Z}_{j_1 \ldots j_m} = \overline{X}_{j_1 \ldots j_m} + \overline{Y}_{j_1 \ldots j_m} .$$

Infatti, avendosi [N. 5, (3)]:

$$X_{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3 {}_{j_1 \ldots j_m} \overline{X}_{j_1 \ldots j_m} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} ,$$

$$Y_{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3 {}_{j_1 \ldots j_m} \overline{Y}_{j_1 \ldots j_m} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} ,$$

sommando membro a membro, e tenendo presenti (1) e (4), si ricava la (2).
In modo analogo, partendo dalla (3') del N. 5, si riscontra la (3).

Le relazioni (2) e (3) mostrano che $Z_{i_1 \ldots i_m}$ e $\overline{Z}_{j_1 \ldots j_m}$ si possono interpretare [N. 7] come componenti di un medesimo tensore m^plo^ $\boldsymbol{Z}$ rispetto al riferimento (y_i) e al riferimento $(\overline{y}_i)$. Per questo, e per le (1) e (4), rimane giustificata la denominazione di *tensore somma* dei due tensori $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ attribuita al tensore $\boldsymbol{Z}$; il che si può esprimere graficamente con la relazione

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}, \tag{5}$$

che è la stessa che viene abitualmente usata per indicare la somma dei vettori.

Le (1) e (4), che sono simbolicamente contenute nella (5), esprimono che *le componenti cartesiane del tensore somma sono le somme delle componenti corrispondenti dei tensori addendi.*

È manifesta l'estensione alla somma di più tensori.

11. - **Prodotto.** — Sieno $X_{i_1 \ldots i_p}$ le componenti cartesiane di un tensore p^plo^ $\boldsymbol{X}$ e $Y_{k_1 \ldots k_q}$ quelle di un secondo tensore q^plo^ $\boldsymbol{Y}$, s' intende rispetto al riferimento (y_i). Poniamo:

$$Z_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q} = X_{i_1 \ldots i_p} \cdot Y_{k_1 \ldots k_q} . \tag{1}$$

Passando dal riferimento (y_i) al riferimento $(\overline{y}_i)$ si ottengono le relazioni:

$$Z_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q} = \sum_1^3{}_{j_1 \ldots j_p h_1 \ldots h_q} \overline{Z}_{j_1 \ldots j_p h_1 \ldots h_q} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_p j_p} \alpha_{k_1 h_1} \ldots \alpha_{k_q h_q} , \tag{2}$$

e le equivalenti

$$\overline{Z}_{j_1 \ldots j_p h_1 \ldots h_q} = \sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q} Z_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_p j_p} \alpha_{k_1 h_1} \ldots \alpha_{k_q h_q} , \tag{3}$$

essendo

$$\overline{Z}_{j_1 \ldots j_p h_1 \ldots h_q} = \overline{X}_{j_1 \ldots j_p} \cdot \overline{Y}_{h_1 \ldots h_q} . \tag{4}$$

Infatti, avendosi [N. 5, (3)]

$$X_{i_1 \ldots i_p} = \sum_1^3{}_{j_1 \ldots j_p} \overline{X}_{j_1 \ldots j_p} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_p j_p} ,$$

$$Y_{k_1 \ldots k_q} = \sum_1^3{}_{h_1 \ldots h_q} \overline{Y}_{h_1 \ldots h_q} \alpha_{k_1 h_1} \ldots \alpha_{k_q h_q} ,$$

moltiplicando membro a membro, tenendo presenti (1) e (4), si ottiene (2).

In modo analogo, applicando (3') del N. 5, si dimostra (3).

Da (2) e (3) risulta [N. 7] che $Z_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q}$ e $\overline{Z}_{j_1 \ldots j_p h_1 \ldots h_q}$ si comportano come le componenti cartesiane di uno stesso tensore $(p+q)$^plo^, $\boldsymbol{Z}$, rispetto alle due terne (y_i) e $(\overline{y}_i)$. Per questo, e per (1) e (4), il tensore $\boldsymbol{Z}$ chiamasi *prodotto* dei due tensori $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ e si scrive:

$$(5) \qquad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}.$$

Se $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ sono tensori semplici ritroviamo il caso già considerato al N. 3.

È manifesta l'estensione al prodotto di quantisivogliono tensori.

12. - **Potenza.** — Se $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}$, cioè se $p = q$ è

$$X_{i_1 \dots i_p} = Y_{i_1 \dots i_p},$$

il prodotto $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^2$ dicesi *quadrato* del tensore $\boldsymbol{X}$ e le sue componenti cartesiane sono:

$$Z_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_p} = X_{i_1 \dots i_p} \cdot X_{k_1 \dots k_p}.$$

È manifesta l'estensione, a una potenza superiore a due, di un tensore qualunque.

Esempio: *potenza m^{ma} del tensore fondamentale* Δ [N. 8].

Tenendo presenti le (1) del N. 8, le componenti cartesiane del tensore $(2m)^{\text{plo}}$ Δ^m saranno

$$\delta_{i_1 k_1} \cdot \delta_{i_2 k_2} \dots \delta_{i_m k_m} = \begin{cases} 1 & \text{per } k_1 = i_1, \dots k_m = i_m, \\ 0 & \text{per una sola coppia di indici distinti.} \end{cases}$$

È facile di constatare che anche queste componenti del tensore Δ^m godono della proprietà, già rilevata per le componenti del tensore Δ [N. 8], di essere invarianti rispetto al sistema di riferimento, cioè:

$$\overline{\delta}_{i_1 k_1} \dots \overline{\delta}_{i_m k_m} = \delta_{i_1 k_1} \dots \delta_{i_m k_m}.$$

13. - **Composizione.** — Sieno $X_{i_1 \dots i_\nu j_1 \dots j_p}$ le componenti cartesiane di un tensore $(\nu + p)^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{X}$ e $Y_{i_1 \dots i_\nu h_1 \dots h_q}$ quelle di un secondo tensore $(\nu + q)^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{Y}$. Si è volutamente messo in rilievo la comunanza di ν indici nelle componenti dei due tensori e per pura semplicità si sono presi i primi ν indici. Vedremo nel seguito che ciò è inessenziale. Poniamo:

$$(1) \qquad Z_{j_1 \dots j_p h_1 \dots h_q} = \sum_1^3{}_{i_1 \dots i_\nu} X_{i_1 \dots i_\nu j_1 \dots j_p} \cdot Y_{i_1 \dots i_\nu h_1 \dots h_q}.$$

Passando dal sistema di riferimento (y_i) al sistema $(\overline{y}_i)$ si hanno le relazioni:

$$(2) \quad Z_{j_1 \dots j_p h_1 \dots h_q} = \sum_1^3{}_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q} \overline{Z}_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q} \alpha_{j_1 i_1} \dots \alpha_{j_p i_p} \alpha_{h_1 k_1} \dots \alpha_{h_q k_q},$$

e le equivalenti

$$(3)\quad \overline{Z}_{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_q} = \sum_1^3{}_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q} Z_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q}\, \alpha_{j_1 i_1}\ldots\alpha_{j_p i_p}\, \alpha_{h_1 k_1}\ldots\alpha_{h_q k_q},$$

essendo

$$(4)\qquad \overline{Z}_{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_q} = \sum_1^3{}_{l_1\ldots l_\nu} \overline{X}_{l_1\ldots l_\nu i_1\ldots i_p}\cdot \overline{Y}_{l_1\ldots l_\nu k_1\ldots k_q}.$$

Infatti, per le (3) del N. 5 si ha

$$X_{i_1\ldots i_\nu j_1\ldots j_p} = \sum_1^3{}_{l_1\ldots l_\nu r_1\ldots r_p} \overline{X}_{l_1\ldots l_\nu r_1\ldots r_p}\, \alpha_{i_1 l_1}\ldots\alpha_{i_\nu l_\nu}\, \alpha_{j_1 r_1}\ldots\alpha_{j_p r_p},$$

$$Y_{i_1\ldots i_\nu h_1\ldots h_q} = \sum_1{}_{m_1\ldots m_\nu s_1\ldots s_q} \overline{Y}_{m_1\ldots m_\nu s_1\ldots s_q}\, \alpha_{i_1 m_1}\ldots\alpha_{i_\nu m_\nu}\, \alpha_{h_1 s_1}\ldots\alpha_{h_q s_q};$$

moltiplicando membro a membro e sommando rispetto agli indici comuni $i_1\ldots i_\nu$, si ottiene successivamente, tenendo presenti (1) di questo numero e (2) del N. 1:

$$\begin{aligned}
Z_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q} &= \sum_1^3{}_{l_1\ldots l_\nu r_1\ldots r_p m_1\ldots m_\nu s_1\ldots s_q} \overline{X}_{l_1\ldots l_\nu r_1\ldots r_p}\cdot \overline{Y}_{m_1\ldots m_\nu s_1\ldots s_q}\cdot \\
&\quad\cdot\left(\sum_1^3{}_{i_1} \alpha_{i_1 l_1}\alpha_{i_1 m_1}\right)\cdots\left(\sum_1^3{}_{i_\nu}\alpha_{i_\nu l_\nu}\alpha_{i_\nu m_\nu}\right)\alpha_{j_1 r_1}\ldots\alpha_{j_p r_p}\cdot\alpha_{h_1 s_1}\ldots\alpha_{h_q s_q} \\
&= \sum_1^3{}_{l_1\ldots l_\nu r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q} \overline{X}_{l_1\ldots l_\nu r_1\ldots r_p}\, \overline{Y}_{l_1\ldots l_\nu s_1\ldots s_p}\, \alpha_{j_1 r_1}\ldots\alpha_{j_p r_p}\cdot\alpha_{h_1 s_1}\ldots\alpha_{h_q s_q} \\
&= \sum_1^3{}_{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q} \alpha_{j_1 r_1}\ldots\alpha_{j_p r_p}\cdot\alpha_{h_1 s_1}\ldots\alpha_{h_q s_q} \sum_1^3{}_{l_1\ldots l_\nu} \overline{X}_{l_1\ldots l_\nu r_1\ldots r_p}\, \overline{Y}_{l_1\ldots l_\nu s_1\ldots s_q}
\end{aligned}$$

da cui, per (4),

$$Z_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q} = \sum_1^3{}_{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q} \overline{Z}_{r_1\ldots r_p s_1\ldots s_q}\, \alpha_{j_1 r_1}\ldots\alpha_{j_p r_p}\, \alpha_{h_1 s_1}\ldots\alpha_{h_q s_q},$$

c. v. d.

In modo analogo si dimostra (3), partendo dalla (3′) del N. 5.

Le (2) e (3) mostrano che $Z_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q}$ e $\overline{Z}_{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_q}$ si possono interpretare come componenti cartesiane, rispetto alle due terne (y_i) e $(\overline{y}_i)$, di uno stesso tensore $(p+q)^{\text{plo}}$ Z. Questo tensore dicesi *composto* dei due tensori X e Y. In modo preciso esso risulta definito cartesianamente, con riferimento alla terna (y_i), da (1) mediante *saturazione* degli indici comuni $i_1\ldots i_\nu$ nelle componenti dei due tensori X e Y.

Poichè le componenti dello stesso tensore Z, rispetto alla terna $(\overline{y}_i)$ sono definite da (4), risulta da questa e dal confronto con (1), che l'operazione di saturazione ha carattere invariantivo, cioè indipendente dal sistema di riferimento.

APPLICAZIONE. — Sia ora $\boldsymbol{X}$ un tensore m^{plo}, di componenti $X_{i_1 \dots i_m}$ e sia $\boldsymbol{Y} = \Delta^m$, cioè [N. 12 (esempio)] il tensore $(2m)^{plo}$ di componenti $\delta_{i_1 k_1} \dots \delta_{i_m k_m}$. Chiamando ancora $\boldsymbol{Z}$ il tensore m^{plo} composto dei due, ottenuto mediante la saturazione degli indici comuni $i_1 \dots i_m$ (si rilevi che per le componenti del secondo tensore questi indici non sono più consecutivi) si ottengono per le sue componenti le seguenti espressioni:

$$Z_{k_1 \dots k_m} = \sum_1^3{}_{i_1 \dots i_m} X_{i_1 \dots i_m} \delta_{i_1 k_1} \dots \delta_{i_m k_m} .$$

Per le (1) del N. 8 il secondo membro si riduce a $X_{k_1 \dots k_m}$, per cui

$$Z_{k_1 \dots k_m} = X_{k_1 \dots k_m} ,$$

cioè è $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}$. Dunque: *componendo un tensore m^{plo} colla potenza m^{ma}, Δ^m, del tensore fondamentale Δ si ottiene il tensore stesso.* Ciò giustifica la denominazione di *unitario* attribuita al tensore fondamentale [N. 8].

Sono pure interessanti, come si vedrà in seguito, le composizioni di tensori col tensore **E** [N. 9].

CAPITOLO III.

Tensori variabili. — Derivazione

14. - **Tensori costanti e tensori variabili.** — Un tensore dicesi *costante* se è indipendente dal posto, cioè se le sue componenti sono *costanti*, non dipendenti dalle coordinate y_i dei punti dello spazio. Sono ad esempio costanti: il tensore doppio Δ [N. 8] e il tensore triplo E [N. 9].

Se le componenti del tensore sono funzioni di y_1, y_2, y_3, e quindi il tensore è funzione del posto, esso dicesi *variabile*. Daremo ora un esempio notevole di tensore variabile.

15. - **Tensore d'inerzia.** — Si abbia una distribuzione qualsiasi di masse, nello spazio, e immaginiamo di riferirci, per maggiore semplicità, ad un sistema di assi cartesiani coll'origine nel baricentro e gli assi stessi coincidenti cogli assi principali d'inerzia [Mecc. raz., N. 158]. Chiamando I^0_{kk} $(k = 1, 2, 3)$ i momenti principali d'inerzia relativi al baricentro e M la massa totale (somma delle masse) si consideri il tensore doppio I, le cui componenti, rispetto al riferimento predetto, sono definite dalle seguenti posizioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} I_{kk} = I^0_{kk} + M(y^2_{k+1} + y^2_{k+2}), \\ I_{k+1\,k+2} = -My_{k+1}\,y_{k+2}. \end{cases}$$

In queste formule si deve fare successivamente $k = 1, 2, 3$ e considerare equivalenti gli indici che differiscono tra di loro di 3 oppure di multipli di 3.

Come si vede le componenti del tensore I sono funzioni di y_1, y_2, y_3; si tratta quindi di un *tensore variabile* e altresì *simmetrico* [N. 7].

Le componenti di I hanno notevole significato meccanico: I_{kk} è il momento d'inerzia delle masse rispetto all'asse parallelo all'asse y_k e passante per il punto di coordinate y_1, y_2, y_3 [Mecc. raz. N. 155, (3)]; $I_{k+1\,k+2}$ è l'opposto del prodotto d'inerzia relativo, nel punto stesso, alla coppia di direzioni degli assi y_{k+1} e y_{k+2}.

Infatti, chiamiamo ora η_i le coordinate di un punto dello spazio rispetto ad assi paralleli agli assegnati, ma coll'origine nel punto ξ_i; sarà

$$\eta_i = y_i - \xi_i .$$

Il momento di deviazione relativo alle direzioni $k+1$ e $k+2$ è [Mecc. raz. N. 157]

$$\Sigma\, m\, \eta_{k+1}\, \eta_{k+2},$$

riferendosi la sommatoria a tutte le masse del sistema; e per le precedenti

$$\Sigma m\,(y_{k+1} - \xi_{k+1})\,(y_{k+2} - \xi_{k+2}) =$$

$$= \Sigma\, m\,(y_{k+1}\, y_{k+2} - \xi_{k+1}\, y_{k+2} - \xi_{k+2}\, y_{k+1} + \xi_{k+1}\, \xi_{k+2}) =$$

$$= \Sigma\, m\, y_{k+1}\, y_{k+2} - \xi_{k+1}\, \Sigma\, m\, y_{k+2} - \xi_{k+2}\, \Sigma\, m\, y_{k+1} + \xi_{k+1}\, \xi_{k+2}\, \Sigma\, m\,;$$

ma è

$$\Sigma\, m\, y_{k+1}\, y_{k+2} = 0$$

perchè gli assi (y_i) di riferimento sono assi principali d'inerzia [Mecc. raz. N. 158], inoltre

$$\Sigma\, m\, y_{k+2} = \Sigma\, m\, y_{k+1} = 0,$$

perchè l'origine degli assi (y_i) è il baricentro [Mecc. raz. N. 139], inoltre $\Sigma m = M$, per cui in definitiva l'accennato momento di deviazione si riduce a

$$M\, \xi_{k+1}\, \xi_{k+2}, \qquad \text{c. v. d.}$$

Come si vede, la conoscenza del tensore I, in ogni punto dello spazio, caratterizza la distribuzione dei momenti d'inerzia e dei prodotti di inerzia, o momenti di deviazione, dell'assegnato sistema di masse, epperò resta giustificata la denominazione di *tensore d'inerzia* da attribuirsi al tensore I.

16. - **Tensore derivato di un vettore.** — Sieno X_i le componenti cartesiane di un vettore, o tensore semplice, X, funzione dei punti $P(y_i)$ dello spazio. Ciò implica [N. 14] che le X_i sono funzioni di y_1, y_2, y_3. Poniamo

$$(1) \qquad Z_{i|k} = \frac{\partial X_i}{\partial y_k}.$$

Passando al sistema di riferimento $(\overline{y}_i)$, si ottiene:

$$Z_{i|k} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, \overline{Z}_{j|h}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh}, \tag{2}$$

e le equivalenti relazioni

$$\overline{Z}_{j|h} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, Z_{i|k}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh}, \tag{3}$$

avendo posto

$$\overline{Z}_{j|h} = \frac{\partial \overline{X}_j}{\partial \overline{y}_h}. \tag{4}$$

Infatti, applicando al vettore X la (1) del N. 2, si ha

$$X_i = \sum_{1}^{3}{}_{j}\, \overline{X}_j\, \alpha_{ij}.$$

Derivando rispetto a y_k si ottiene

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_{j}\, \frac{\partial \overline{X}_j}{\partial y_k}\, \alpha_{ij};$$

ma è, tenuto conto delle (1′) del N. 1,

$$\frac{\partial \overline{X}_j}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_{h}\, \frac{\partial \overline{X}_j}{\partial \overline{y}_h}\, \frac{\partial \overline{y}_h}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_{h}\, \frac{\partial \overline{X}_j}{\partial \overline{y}_h}\, \alpha_{kh},$$

per cui, sostituendo nella precedente, si ricava

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, \frac{\partial \overline{X}_j}{\partial \overline{y}_h}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh},$$

dalla quale, per (1) e (4), scende senz'altro (3), c. v. d.

In modo analogo si dimostrerebbe la (3), partendo dalla (1′) del N. 2.

Le (2) e (3) esprimono che $Z_{i|k}$ e $\overline{Z}_{j|h}$ si possono interpretare come componenti di uno stesso tensore Z, doppio, rispetto ai due riferimenti (y_i) e $(\overline{y}_i)$.

Il tensore doppio Z, le cui componenti cartesiane (1) sono le derivate delle componenti cartesiane X_i del vettore X chiamasi *tensore derivato del vettore X*.

Si noti che, in generale, il tensore derivato non è simmetrico per cui le sue nove componenti sono distinte.

È simmetrico, come scende da (1), se

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_k} = \frac{\partial X_k}{\partial y_i},$$

cioè [An. Mat. N. 217] se $\sum_{1}^{3}{}_i X_i \, dy_i$ è un differenziale esatto, per cui [Mecc. raz. N. 52] il vettore $\boldsymbol{X}$ è gradiente di uno scalare, $\boldsymbol{X} = \text{grad}\, f$. Si ha allora

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

e quindi, per (1),

$$X_{i|k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \, \partial y_k}.$$

Si rilevi ancora che se il vettore $\boldsymbol{X}$ è costante [N. 14] è per la (1)

$$Z_{i|k} = 0,$$

e per la (3)

$$\overline{Z}_{j|h} = 0,$$

e quindi, per la (4),

$$\frac{\partial \overline{X}_j}{\partial \overline{y}_h} = 0,$$

cioè $\overline{X}_j$ sono costanti. Dunque *la costanza di un vettore ha carattere invariantivo,* cioè indipendente dal sistema di riferimento.

17. - **Tensore derivato di un tensore qualunque.** — Le considerazioni del numero precedente si possono facilmente estendere ad un tensore qualsiasi. Sieno $X_{i_1 \ldots i_m}$ le componenti di un tensore m^plo^ $\boldsymbol{X}$, funzioni di y_1, y_2, y_3.

Ponendo

$$(1) \qquad Z_{i_1 \ldots i_m | k} = \frac{\partial X_{i_1 \ldots i_m}}{\partial y_k},$$

di fronte a un cambiamento di sistema di riferimento si hanno le relazioni:

$$(2) \qquad Z_{i_2 \ldots i_m | k} = \sum_{1}^{3}{}_{j_1 \ldots j_m h} \overline{Z}_{j_1 \ldots j_m | h} \, \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} \, \alpha_{k h},$$

e le equivalenti:

$$(3) \qquad \overline{Z}_{j_1 \ldots j_m | h} = \sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m k} Z_{i_1 \ldots i_m | k} \, \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} \, \alpha_{k h},$$

avendo posto

$$(4) \qquad \overline{Z}_{j_1 \ldots j_m|h} = \frac{\partial \overline{X}_{j_1 \ldots j_m}}{\partial \overline{y}_h} .$$

Al solito basta applicare al tensore $\boldsymbol{X}$ la (3) del N. 5, con che si ha

$$X_{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{j_1 \ldots j_m} \overline{X}_{j_1 \ldots j_m} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} .$$

Derivando rispetto a y_k, tenendo presente (1) e notando che

$$\frac{\partial \overline{X}_{j_1 \ldots j_m}}{\partial y_k} = \sum_1^3{}_h \frac{\partial \overline{X}_{j_1 \ldots j_m}}{\partial \overline{y}_h} \frac{\partial \overline{y}_h}{\partial y_k} = \sum_1^3{}_h \frac{\partial \overline{X}_{j_1 \ldots j_m}}{\partial \overline{y}_h} \alpha_{kh} ,$$

si ottiene

$$Z_{i_1 \ldots i_m|k} = \sum_1^3{}_{j_1 \ldots j_m h} \frac{\partial \overline{X}_{j_1 \ldots j_m}}{\partial \overline{y}_h} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m} \alpha_{kh} ,$$

e quindi per la (4) si ottiene (2), c. v. d.

In modo analogo si dimostra (3), applicando la (3') del N. 5.

Le (2) e (3) autorizzano a ritenere $Z_{i_1 \ldots i_m|k}$ le componenti rispetto al riferimento (y_i) di un tensore $(m+1)^{\text{plo}}$ che dicesi ***derivato*** del tensore m^{plo} $\boldsymbol{X}$ le cui componenti rispetto alla terna $(\overline{y}_i)$ sono $\overline{Z}_{j_1 \ldots j_m|h}$.

Se il tensore $\boldsymbol{X}$ è costante [N. 14] il suo derivato è nullo.

Ciò scende immediatamente dall'osservazione che se il tensore $\boldsymbol{X}$ è costante, sono costanti le sue componenti e quindi nulle le derivate di queste, che sono le componenti del tensore derivato.

Come dal tensore m^{plo} $\boldsymbol{X}$ si passa al tensore derivato $(m+1)^{\text{plo}}$ così da questo si deduce un tensore $(m+2)^{\text{plo}}$, derivato, che è il ***derivato secondo*** di $\boldsymbol{X}$ e così di seguito, il derivato di ordine μ sarà un tensore $(m+\mu)^{\text{plo}}$.

Per esempio il tensore triplo, primo derivato del tensore di inerzia $\boldsymbol{I}$ [N. 15, (1)], ha per componenti:

$$\frac{\partial I_{kk}}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial I_{kk}}{\partial y_{k+1}} = 2 M y_{k+1} , \quad \frac{\partial I_{kk}}{\partial y_{k+2}} = 2 M y_{k+2} ,$$

$$\frac{\partial I_{k+1\, k+2}}{\partial y_k} = 0 , \quad \frac{\partial I_{k+1\, k+2}}{\partial y_{k+1}} = - M y_{k+2} , \quad \frac{\partial I_{k+1\, k+2}}{\partial y_{k+2}} = - M y_{k+1} .$$

Il derivato secondo di $\boldsymbol{I}$ è un tensore quadruplo costante che ha nulle tutte le componenti tranne le seguenti:

$$\frac{\partial^2 I_{kk}}{\partial y_{k+1}^2} = 2M, \quad \frac{\partial^2 I_{kk}}{\partial y_{k+2}^2} = 2M, \quad \frac{\partial^2 I_{k+1\,k+2}}{\partial y_{k+1}\,\partial y_{k+2}} = -M.$$

Infine il tensore derivato terzo di $\boldsymbol{I}$ è nullo; e necessariamente sono nulli i derivati successivi.

Altro esempio notevole di derivazioni successive di un tensore, si ha partendo da una funzione $f(y_1, y_2, y_3)$ che costituisce un tensore di ordine zero [N. 7]. Le sue derivate prime

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

definiscono un tensore di primo ordine o vettore: il grad f; le derivate seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_k}$$

definiscono un tensore doppio simmetrico; e così via; le derivate m^{me}

$$\frac{\partial^m f}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_m}}$$

sono le componenti cartesiane di un tensore m^{plo} simmetrico che è il derivato m^{mo} della funzione, o tensore di ordine zero, f.

18. - Divergenze di un tensore. — Sieno X_i le componenti cartesiane di un vettore $\boldsymbol{X}$. È noto [An. Mat. N. 280] che chiamasi *divergenza* del vettore il trinomio

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial X_i}{\partial y_i}. \tag{1}$$

È noto altresì che essa ha carattere invariantivo di fronte a differenti sistemi di riferimento; precisamente passando dal riferimento (y_i) ad altro $(\overline{y}_i)$ si ha

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial \overline{X}_i}{\partial \overline{y}_i} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial X_i}{\partial y_i}. \tag{2}$$

La constatazione è del resto immediata. Basta applicare al vettore $\boldsymbol{X}$ la (1') del N. 2, con che si ottiene:

$$\overline{X}_k = \sum_1^3{}_i X_i\,\alpha_{ik};$$

derivando rispetto a $\overline{y}_k$ si ha

$$\frac{\partial \overline{X}_k}{\partial \overline{y}_k} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial X_i}{\partial \overline{y}_k}\,\alpha_{ik},$$

ovvero, per essere, qualora si tenga presente (1) del N. 1,

$$\frac{\partial X_i}{\partial \bar{y}_k} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial \bar{y}_k} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \alpha_{jk},$$

sostituendo

$$\frac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{y}_k} = \sum_1^3{}_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \alpha_{ik} \alpha_{jk};$$

sommando rispetto a k e tenendo presenti (2) del N. 1, si ha

$$\sum_1^3{}_k \frac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{y}_k} = \sum_1^3{}_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \sum_1^3{}_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \sum_1^3{}_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \delta_{ij}$$

$$= \sum_1^3{}_i \frac{\partial X_i}{\partial y_i},$$

che è la (2).

Consideriamo ora un tensore doppio che continuerò ad indicare con $\boldsymbol{X}$; sieno X_{ik} le sue componenti cartesiane rispetto al riferimento (y_i).

Poniamo

(3) $$Y_i = \sum_1^3{}_k \frac{\partial X_{ik}}{\partial y_k}.$$

Operando un cambiamento di riferimento, cioè passando dal sistema (y_i), al sistema $(\bar{y}_i)$, si ha

(4) $$Y_i = \sum_1^3{}_k \bar{Y}_k \alpha_{ik},$$

oppure

(4') $$\bar{Y}_k = \sum_1^3{}_i Y_i \alpha_{ik},$$

avendo posto

(5) $$\bar{Y}_i = \sum_1^3{}_k \frac{\partial \bar{X}_{ik}}{\partial \bar{y}_k}.$$

Infatti, applicando al tensore doppio $\boldsymbol{X}$ la (3) del N. 5, si ha

$$X_{ik} = \sum_1^3{}_{jh} \bar{X}_{jh} \alpha_{ij} \alpha_{kh}.$$

Derivando rispetto a y_k, si ottiene

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial y_k} = \sum_1^3{}_{jh} \frac{\partial \bar{X}_{jh}}{\partial y_k} \alpha_{ij} \alpha_{kh},$$

ma è, tenendo presente (1') del N. 1,

$$\frac{\partial \overline{X}_{jh}}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_l \frac{\partial \overline{X}_{jh}}{\partial \overline{y}_l} \frac{\partial \overline{y}_l}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_l \frac{\partial \overline{X}_{jh}}{\partial \overline{y}_l} \alpha_{kl} ,$$

per cui sostituendo:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_{jhl} \frac{\partial \overline{X}_{jh}}{\partial \overline{y}_l} \alpha_{ij}\, \alpha_{kh}\, \alpha_{kl} ;$$

sommando rispetto a k, tenuto conto di (2) del N. 1, si ha

$$\sum_{1}^{3}{}_k \frac{\partial X_{ik}}{\partial y_k} = \sum_{1}^{3}{}_{jhl} \frac{\partial \overline{X}_{jh}}{\partial \overline{y}_l} \alpha_{ij} \sum_{1}^{3}{}_k \alpha_{kh}\, \alpha_{kl} = \sum_{1}^{3}{}_{jhl} \frac{\partial \overline{X}_{jh}}{\partial \overline{y}_l} \alpha_{ij}\, \delta_{hl}$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{jh} \frac{\partial \overline{X}_{jh}}{\partial \overline{y}_h} \alpha_{ij} ,$$

da cui, per (3) e (5),

$$Y_i = \sum_{1}^{3}{}_j \overline{Y}_j\, \alpha_{ij} ,$$

che è appunto la (4), c. v. d.

Analogamente si dimostra la (4').

La (4) e la (4') mostrano che Y_i e $\overline{Y}_k$ sono le componenti di uno stesso vettore $\boldsymbol{Y}$ rispetto alle due terne (y_i) e $(\overline{y}_i)$; tale vettore si definisce ***divergenza*** del tensore doppio $\boldsymbol{X}$.

OSSERVAZIONE 1ª. - Si rilevi da (3) che le componenti Y_i della divergenza del tensore doppio $\boldsymbol{X}$ si sono ottenute derivando le componenti X_{ik} rispetto ad y_k e poi sommando rispetto a k. Si ottiene, in generale, un'altra divergenza $\boldsymbol{Z}$ dello stesso tensore $\boldsymbol{X}$, derivando X_{ik} rispetto a y_i e sommando rispetto a i, cioè le componenti di $\boldsymbol{Z}$ risultano essere:

$$(6) \qquad Z_k = \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial X_{ik}}{\partial y_i} .$$

Dunque un tensore doppio ha due divergenze.

OSSERVAZIONE 2ª. - Se $X_{ik} = X_{ki}$, cioè se il tensore $\boldsymbol{X}$ è *simmetrico* [N. 7] allora $Y_i = Z_i$ cioè le due divergenze coincidono: $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}$.

Ciò scende immediatamente dal confronto di (3) e (6).

Dunque un tensore doppio simmetrico ha una sola divergenza, le cui componenti sono indifferentemente definite da (3) oppure da (6).

Se $\boldsymbol{X}$ è un tensore *emisimmetrico* [N. 7], avendosi $X_{ik}+X_{ki}=0$, risulta $Y_i+Z_i=0$, cioè le due divergenze sono vettori opposti: $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}=0$.

È facile la estensione delle considerazioni svolte al caso generale in cui $\boldsymbol{X}$ sia un tensore m$^{\text{plo}}$ di componenti $X_{i_1\ldots i_m}$. Ponendo

$$(7)\qquad Y_{i_1\ldots i_{k-1}\, i_{k+1}\ldots i_m}=\sum_1^3{}_{i_k}\frac{\partial X_{i_1\ldots i_{k-1}\, i_k\, i_{k+1}\ldots i_m}}{\partial y_{i_k}}.$$

si ottengono le componenti cartesiane, rispetto al riferimento (y_i), di un tensore $\boldsymbol{Y}(m-1)^{\text{plo}}$, che si definisce ***divergenza*** di $\boldsymbol{X}$.

Come si vede, in generale, si hanno m divergenze di un tensore m$^{\text{plo}}$, perchè la derivazione delle sue componenti $X_{i_1\ldots i_m}$ si può compiere, una volta per ciascuno, rispetto a $y_{i_1},\ldots y_{i_m}$.

Naturalmente questo numero diminuisce se si considerano tensori m$^{\text{pli}}$ speciali.

19. - **Rotori.** — Designi ora $\boldsymbol{X}$ un vettore di componenti X_k; si consideri il tensore doppio derivato di $\boldsymbol{X}$ [N. 16] di componenti

$$\frac{\partial X_k}{\partial y_j};$$

si componga [N. 13] infine questo tensore doppio col tensore E [N. 9] di componenti ε_{ijk}, saturando gli indici j e k, si ottiene un vettore $\boldsymbol{R}$, le cui componenti risultano definite dalle seguenti relazioni:

$$(1)\qquad R_i=\sum_1^3{}_{jk}\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial X_k}{\partial y_j}.$$

Sviluppando la sommatoria e tenendo presenti (1) del N. 9 si ottiene:

$$(1')\qquad R_i=\frac{\partial X_{i+2}}{\partial y_{i+1}}-\frac{\partial X_{i+1}}{\partial y_{i+2}}.$$

Infatti, sviluppando prima la sommatoria rispetto a j, facendo successivamente $j=i,\ i+1,\ i+2$, colla consueta intesa di considerare equivalenti gli indici che differiscono tra loro di 3 o di multipli di 3, si ha:

$$R_i=\sum_1^3{}_k\left(\varepsilon_{i\,i+1\,k}\,\frac{\partial X_k}{\partial y_{i+1}}+\varepsilon_{i\,i+2\,k}\,\frac{\partial X_k}{\partial y_{i+2}}\right),$$

e infine sviluppando ulteriormente la sommatoria col porre successivamente $k = i,\ i+1,\ i+2$, e tenendo sempre presenti (1) del N. 9, si ottiene

$$R_i = \varepsilon_{i\, i+1\, i+2} \frac{\partial X_{i+2}}{\partial y_{i+1}} + \varepsilon_{i\, i+2\, i+1} \frac{\partial X_{i+1}}{\partial y_{i+2}};$$

e perchè, qualunque sia i, è sempre

$$\varepsilon_{i\, i+1\, i+2} = 1, \qquad \varepsilon_{i\, i+2\, i+1} = -1,$$

dalla precedente scende senz' altro la (1'), c. v. d.

Nelle (1') si riconoscono le ben note espressioni [An. Mat. N. 281] delle componenti cartesiane del *rotore* di $\boldsymbol{X}$, per cui

$$\boldsymbol{R} = \operatorname{rot} \boldsymbol{X}.$$

Il criterio contenuto nella (1) si può assumere come base per definire il *rotore* di un tensore qualsiasi.

Riferiamoci, per semplicità, ad un tensore doppio $\boldsymbol{X}$ di componenti X_{lk}; consideriamo il suo tensore derivato di componenti [N. 16]

$$\frac{\partial X_{lk}}{\partial y_j},$$

e componiamolo [N. 13] col tensore E [N. 9] di componenti ε_{ijk}, saturando gli indici j e k; si ottiene il tensore doppio $\boldsymbol{R}$ di componenti

$$R_{il} = \sum_{1}^{3}{}_{jk}\ \varepsilon_{ijk} \frac{\partial X_{lk}}{\partial y_j}. \tag{2}$$

Il tensore doppio $\boldsymbol{R}$ si definisce *rotore* del tensore doppio $\boldsymbol{X}$. Ricordando le proprietà del tensore E [N. 9] si può altresì mettere la precedente sotto la seguente forma:

$$R_{il} = \frac{\partial X_{l\, i+2}}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial X_{l\, i+1}}{\partial y_{i+2}}, \tag{2'}$$

che presenta notevole analogia colla (1') relativa al rotore di un vettore.

Infatti, sviluppando il secondo membro di (2) prima rispetto all' indice j, col porre successivamente $j = i,\ i+1,\ i+2$, e tenendo presenti (1) del N. 9, si ottiene:

$$R_{il} = \sum_{1}^{3}{}_{k} \left(\varepsilon_{i\, i+1\, k} \frac{\partial X_{lk}}{\partial y_{i+1}} + \varepsilon_{i\, i+2\, k} \frac{\partial X_{lk}}{\partial y_{i+2}} \right),$$

e sviluppando l' ulteriore sommatoria, col fare successivamente $k = i,\ i + 1,$ $i + 2$, si ha:

$$R_{il} = \varepsilon_{i\,i+1\,i+2} \frac{\partial X_{l\,i+2}}{\partial y_{i+1}} + \varepsilon_{i\,i+2\,i+1} \frac{\partial X_{l\,i+1}}{\partial y_{i+2}},$$

dalla quale infine, per essere

$$\varepsilon_{i\,i+1\,i+2} = 1, \quad \varepsilon_{i\,i+2\,i+1} = -1$$

per qualunque i, si ricava la (2′), c. v. d.

Si rammenti, riferendosi alla (1′), che l' annullarsi di R_i cioè del rotore del vettore $\boldsymbol{X}$, di componenti X_i, è condizione caratteristica [An. Mat. N. 217] perchè l' espressione differenziale

$$\sum_{1}^{3}{}_i\, X_i\, dy_i$$

sia un differenziale esatto, cioè affinchè il vettore $\boldsymbol{X}$ sia il gradiente di una funzione.

Riferendoci ora al rotore di un tensore doppio, che continuiamo a indicare $\boldsymbol{X}$, si può rilevare un analogo significato. Infatti l' annullarsi di R_{il} in (2′) esprime le condizioni affinchè il tensore doppio $\boldsymbol{X}$ di componenti X_{lk} si possa considerare il derivato [N. 17] del vettore di componenti X_l, ossia perchè sia

$$X_{lk} = \frac{\partial X_l}{\partial y_k}.$$

Osservazione 1ª. – Se nel secondo membro di (2) al posto di X_{lk} si scrive X_{kl} si ottiene

$$R'_{il} = \sum_{1}^{3}{}_{jk}\, \varepsilon_{ijk} \frac{\partial X_{kl}}{\partial y_j}, \tag{3}$$

e corrispondentemente (2′) dà luogo a

$$R'_{il} = \frac{\partial X_{i+2\,l}}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial X_{i+1\,l}}{\partial y_{i+2}}. \tag{3′}$$

Queste definiscono un tensore doppio $\boldsymbol{R}'$, che ancor esso può assumersi come *rotore* del tensore doppio $\boldsymbol{X}$: dunque un tensore doppio ha due rotori.

OSSERVAZIONE 2ª. - Se il tensore doppio $\boldsymbol{X}$ è *simmetrico*, essendo [N. 7] $X_{lk} = X_{kl}$ dal confronto di (2) e (3), oppure di (2′) e (3′), scende $R'_{il} = R_{il}$ e quindi $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$. Dunque un tensore doppio simmetrico ha un solo rotore, le cui componenti cartesiane sono definite da (2) o da (3), oppure da (2′) o da (3′).

ESEMPIO. - Il tensore d'inerzia $\boldsymbol{I}$ [N. 15] ha per rotore un tensore doppio *emisimmetrico* [N. 7] $\boldsymbol{R}$ di componenti cartesiane

$$R_{ii} = 0, \qquad R_{i+1\; i+2} = -\, 3My_i.$$

Ciò scende da (2′) tenendo presenti le (1) del N. 15.

Se $\boldsymbol{X}$ è un tensore *emisimmetrico*, essendo [N. 7] $X_{kl} + X_{lk} = 0$, scende dal confronto di (2) e (3), oppure di (2′) con (3′), che $R'_{il} + R_{il} = 0$, cioè i due rotori sono tensori opposti, per cui $\boldsymbol{R}' + \boldsymbol{R} = 0$.

È facile la estensione delle cose dette al caso in cui $\boldsymbol{X}$, anzichè tensore doppio, è un tensore m^plo di componenti $X_{i_1 \ldots i_m}$.

Poniamo

$$R^{(h)}_{i\, i_1 \ldots i_{h-1}\, i_{h+1} \ldots i_m} = \sum_{1}^{3}{}_{jk}\, \varepsilon_{ijk}\, \frac{\partial X_{i_1 \ldots i_{h-1}\, k\, i_{h+1} \ldots i_m}}{\partial y_j}; \tag{4}$$

queste definiscono le componenti di un tensore m^plo $\boldsymbol{R}^{(h)}$ che si definisce ***rotore*** di $\boldsymbol{X}$.

Risulta da (4), facendo $h = 1, 2, \ldots m$, che in generale si hanno m rotori di un tensore m^plo.

Sviluppando le sommatorie, col medesimo procedimento già indicato per $m = 1$ e $m = 2$, si può altresì mettere (4) sotto la forma seguente:

$$R^{(h)}_{i\, i_1 \ldots i_{h-1}\, i_{h+1} \ldots i_m} = \frac{\partial X_{i_1 \ldots i_{h-1}\, i+2\; i_{h+1} \ldots i_m}}{\partial y_{i+1}} - \frac{\partial X_{i_1 \ldots i_{h-1}\, i+1\; i_{h+1} \ldots i_m}}{\partial y_{i+2}}. \tag{4′}$$

CAPITOLO IV.

Applicazioni alla Meccanica

20. - **Tensore degli sforzi.** — Un esempio meccanico cospicuo di tensori variabili [N. 14] è il *tensore degli sforzi*. È un tensore doppio simmetrico Φ, le cui componenti cartesiane [Mecc. Raz. N. 244]

$$\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$$

hanno il noto significato: Φ_{ii} = sforzi normali, $\Phi_{i+1, i+2}$ = sforzi tangenziali ($i = 1, 2, 3$) in un sistema continuo, che si trovi in qualunque stato (quiete o movimento) e sotto qualunque sollecitazione.

Il *tensore* Φ caratterizza, in ogni posto, lo stato di *tensione* (*) del sistema continuo, cioè lo sforzo che si esercita su ciascuna delle due faccie di un elemento superficiale qualunque del mezzo continuo. Fissata quella faccia di un elemento superficiale, di vettore unitario normale $\boldsymbol{n}$, che è rivolta dalla parte opposta del verso di $\boldsymbol{n}$, lo sforzo unitario sopra la faccia predetta è il vettore $\boldsymbol{S}$ le cui componenti cartesiane si ottengono componendo [N. 13] il tensore Φ di componenti Φ_{ik} col vettore $\boldsymbol{n}$ di componenti n_k (coseni direttori di $\boldsymbol{n}$) mediante saturazione dell' indice k, cioè [Mecc. raz. N. 245, (1) oppure N. 246, (3)] sono:

$$S_i = \sum_{k=1}^{3} \Phi_{ik} n_k. \qquad (1)$$

(*) È questa l' origine della denominazione " tensore ".

21. - **Equazioni della meccanica dei sistemi continui.** — Trattandosi di un tensore doppio simmetrico il tensore degli sforzi Φ ammette un' unica divergenza [N. 18, Osserv. 2ª], il vettore di componenti

$$\sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_k}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

È noto [Mecc. raz. N. 246, (1)] che in condizioni statiche, in ogni punto dello spazio occupato dai sistemi continui devono essere soddisfatte le seguenti equazioni (indefinite):

$$\varrho F_i = \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_k}, \tag{1}$$

ϱ = densità del mezzo, F_i = componenti della forza unitaria di massa agente sul sistema continuo.

Dalle (1) si trae il notevole significato della divergenza del tensore degli sforzi: in condizioni statiche, essa deve eguagliare la forza unitaria di volume.

In condizioni dinamiche, nel primo membro di (1) basta sostituire ad F_i, $F_i - a_i$ essendo a_i le componenti della accelerazione posseduta dal generico punto a cui ci si riferisce [Mecc. raz. N. 218], almeno per quei sistemi continui ai quali è applicabile il principio di D'ALEMBERT.

22. - **Interpretazione statica del tensore di inerzia di una distribuzione continua di masse.** — Sia S lo spazio occupato da una distribuzione continua di masse materiali e σ la superficie, oppure l' insieme delle superficie limitanti S. Il tensore di inerzia $\boldsymbol{I}$, relativo alla predetta distribuzione, ammette per divergenza il vettore di componenti

$$-2My_i \tag{1}$$

cioè il vettore

$$-2M(P - P_0). \tag{1'}$$

Infatti, tenendo presenti le (1) del N. 15, si hanno per la divergenza di $\boldsymbol{I}$ le seguenti componenti [N. 18, (3)]:

$$\sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial I_{ik}}{\partial y_k} = \frac{\partial I_{i\,i}}{\partial y_i} + \frac{\partial I_{i\,i+1}}{\partial y_{i+1}} + \frac{\partial I_{i\,i+2}}{\partial y_{i+2}} = -2My_i, \qquad \text{c. v. d.}$$

Ciò premesso, se nella (1) del numero precedente si pone

$$\Phi_{ik} = I_{ik},$$

si ottiene

$$\varrho F_i = -2My_i,$$

oppure, in forma vettoriale,

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2M}{\varrho}(P - P_0). \tag{2}$$

Scende da ciò che il tensore d'inerzia $\boldsymbol{I}$ dell'assegnato sistema continuo di masse si può interpretare come tensore Φ degli sforzi corrispondente ad uno stato di equilibrio delle masse stesse essendo ogni particella attratta verso il baricentro P_0 con una forza di massa unitaria (2), che è direttamente proporzionale alla distanza dal baricentro e inversamente proporzionale alla densità della particella stessa.

In quanto alla sollecitazione in superficie σ, indicando con f_i le componenti della forza unitaria superficiale, si ha

$$f_i = [I_{ii}^{(0)} + M(P - P_0)^2]\, n_i - M(P - P_0) \times \boldsymbol{n}\, y_i. \tag{3}$$

Basta applicare la (1) del N. 20 ai punti di σ e al tensore $\boldsymbol{I}$; si ottiene:

$$f_i = \sum_{1}^{3}{}_k\, I_{ik}\, n_k,$$

designando ora n_k i coseni direttori della normale a σ volta verso S. Si sviluppi la sommatoria; tenendo presenti (1) del N. 15, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} f_i &= I_{ii}\, n_i + I_{ii+1}\, n_{i+1} + I_{ii+2}\, n_{i+2} \\ &= [I_{ii}^{(0)} + M(y_{i+1}^2 + y_{i+2}^2)]\, n_i - My_i\, y_{i+1}\, n_{i+1} - My_i\, y_{i+2}\, n_{i+2} \\ &= [I_{ii}^{(0)} + M(y_i^2 + y_{i+1}^2 + y_{i+2}^2)]\, n_i - M_i y_i (y_i n_i + y_{i+1}\, n_{i+1} + y_{i+2}\, n_{i+2}) \\ &= [I_{ii}^{(0)} + M(P - P_0)^2]\, n_i - M_i\, y_i\, (P - P_0) \times \boldsymbol{n}, \end{aligned}$$

c. v. d.

23. - **Piccole deformazioni. - Tensore di deformazione.** — Riferiamoci alle deformazioni infinitesime di un sistema continuo [Mecc. raz. Cap. XIV].

Sia C la configurazione dei punti P; attribuendo a ogni punto uno spostamento infinitesimo $\boldsymbol{v}$, la particella che in C occupava la posizione P va ad assumere la posizione $P + \boldsymbol{v}$: l'insieme di queste posizioni definisce una configurazione $C+DC$, infinitamente prossima alla configurazione, inizialmente considerata, C.

Se si considerano in C due elementi lineari ds e δs, spiccati dal punto $P(y_i)$, detto ψ l'angolo da essi formato, si ha:

$$(1) \qquad ds\,\delta s \cos\psi = \sum_1^3{}_i\, dy_i\, \delta y_i\,,$$

essendo $\frac{dy_i}{ds}$ e $\frac{\delta y_i}{\delta s}$ i coseni direttori dei due elementi lineari.

Esprimiamo la variazione dei due membri quando si passa dalla configurazione C alla configurazione $C+DC$, caratterizzata dagli spostamenti v; si ha:

$$(ds\cdot D\delta s+\delta s\cdot Dds)\cos\psi + ds\,\delta s\cdot D\cos\psi = \sum_1^3{}_i\,(dy_i\cdot D\delta y_i+\delta y_i\cdot Ddy_i);$$

ma è

$$D\cos\psi = -\operatorname{sen}\psi\cdot D\psi\,,$$

$$D\delta y_i = \delta D y_i = \delta v_i = \sum_1^3{}_k\, \frac{\partial v_i}{\partial y_k}\,\delta y_k\,,$$

$$Ddy_i = dDy_i = dv_i = \sum_1^3{}_k\, \frac{\partial v_i}{\partial y_k}\,dy_k\,,$$

per cui si ottiene:

$$(ds\cdot D\delta s+\delta s\cdot Dds)\cos\psi - ds\cdot\delta s\cdot\operatorname{sen}\psi D\psi =$$
$$= \sum_1^3{}_{ik}\,\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\,dy_i\,\delta y_k + \sum_1^3{}_{ik}\,\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\,\delta y_i\, dy_k\,,$$

infine, scambiando tra di loro i e k nell'ultima sommatoria,

$$(ds\cdot D\delta s+\delta s\cdot Dds)\cos\psi - ds\,\delta s\operatorname{sen}\psi\cdot D\psi = \sum_1^3{}_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}+\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right)dy_i\,\delta y_k\,.$$

Dividiamo i due membri per $ds\cdot\delta s$; ponendo:

$$(2) \qquad \begin{cases} n_i = \dfrac{dy_i}{ds}\,, & \nu_i = \dfrac{\delta y_i}{\delta s}\,; \\ \dfrac{Dds}{ds} = \varepsilon_n\,, & \dfrac{D\delta s}{\delta s} = \varepsilon_\nu\,; \end{cases}$$

e infine

$$(3) \qquad 2\xi_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k}+\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\,,$$

si ottiene:

$$(4) \qquad (\varepsilon_n + \varepsilon_\nu) \cos\psi - \operatorname{sen}\psi \cdot D\psi = 2 \sum_{ik}^{3} \xi_{ik}\, n_i\, \nu_k ,$$

formula fondamentale per lo studio delle deformazioni infinitesime, [Mecc. raz. N. 269, (9)].

Giova far rilevare il significato dei simboli, contenuti nella (4).

Dalle (2) scendono i seguenti significati:

n_i = coseni direttori dell' elemento lineare ds,

ν_i = coseni direttori dell' elemento lineare δs,

ε_n = *allungamento unitario* dell' elemento ds,

ε_ν = *allungamento unitario* dell' elemento δs.

In quanto alle (3), esse definiscono, mediante le derivate delle componenti v_i del vettore spostamento v, un tensore doppio simmetrico Ξ di componenti $\xi_{ik} = \xi_{ki}$ che chiamasi *tensore di deformazione*, perchè, come ora vedremo, esso caratterizza in modo completo la deformazione infinitesima del sistema continuo nel passaggio dalla configurazione C alla configurazione $C + DC$.

24. - **Allungamenti unitari**. — Se $\psi = 0$ e $ds = \delta s$ i due elementi lineari spiccati da P in C vengono a coincidere, per cui avendosi: $\nu_i = n_i$, $\varepsilon_\nu = \varepsilon_n$, la (4) del numero precedente diviene senz' altro:

$$(1) \qquad \varepsilon_n = \sum_{ik}^{3} \xi_{ik}\, n_i\, n_k .$$

Questa formula definisce l' allungamento unitario relativo al punto P e alla direzione n [Mecc. raz. N. 270, (1)], una volta noto il tensore di deformazione Ξ.

Facendo coincidere n colla direzione e verso di uno degli assi, per esempio dell' asse y_i, avendosi

$$n_i = 1, \quad n_{i+1} = n_{i+2} = 0,$$

dalla (1) scende

$$\varepsilon_n = \xi_{ii} .$$

Dunque ξ_{ii} rappresenta l' allungamento unitario relativo alla direzione dell' asse y_i.

25. - Variazioni angolari. - Scorrimenti. — Riferendoci nuovamente alla (4) del N. 23, si rilevi che essendo ε_n definita dalla (1) del numero precedente ed avendosi

$$\varepsilon_\nu = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, \xi_{ik}\, \nu_i\, \nu_k\,,$$

la citata formula (4) definisce $D\psi$, cioè la variazione dell'angolo ψ, inizialmente formato in C dagli elementi lineari ds e δs, nel passaggio dalla configurazione C alla configurazione $C + DC$.

Si rilevi che anche $D\psi$ è determinato una volta noto il tensore di deformazione Ξ.

Facendo coincidere n col verso dell'asse y_{i+1} e ν con quello dell'asse y_{i+2}, essendo:

$$n_i = n_{i+2} = 0 \qquad n_{i+1} = 1\,,$$

$$\nu_i = \nu_{i+1} = 0 \qquad \nu_{n+2} = 1\,, \qquad \psi = \frac{\pi}{2}\,,$$

dalla (4) del N. 23 si deduce

$$-\,D\psi = 2\xi_{i+1\,i+2}\,.$$

Appare da questa il significato di *scorrimenti* [Mecc. raz. N. 271] delle componenti $\xi_{i+1\,i+2}$ del tensore Ξ, precisamente $2\xi_{i+1\,i+2}$ è la diminuzione dell'angolo retto, che formavano in C fra loro due elementi lineari paralleli ed equiversi agli assi y_{i+1} e y_{i+2}, nel passaggio dalla configurazione C alla configurazione $C + DC$.

26. - Quadriche degli allungamenti. - Direzioni principali. — Chiamiamo ora ε l'allungamento corrispondente in P ad una direzione n, si ha per (1) del N. 24,

$$\varepsilon = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, \xi_{ik}\, n_i\, n_k\,. \tag{1}$$

Sopra ogni direzione uscente da P si fissi un punto Q tale che

$$|\,P - Q\,| = \frac{1}{\sqrt{\pm\,\varepsilon}}\,, \tag{2}$$

valendo, sotto il radicale, il segno + se $\varepsilon > 0$ e il segno — se $\varepsilon < 0$. Qual'è il luogo dei punti Q?

Immaginiamo di riferirci a un sistema di assi coll'origine in P e paralleli agli assi già prescelti; chiamando x_i le coordinate di Q rispetto a questo nuovo riferimento, si ha

$$x_i = | Q - P | n_i = \frac{n_i}{\sqrt{\pm \varepsilon}};$$

poichè da questa si ricava

$$n_i = x_i \sqrt{\pm \varepsilon},$$

la eliminazione di n_i tra questa e la (1) dà luogo alle equazioni seguenti:

$$\Sigma_{ik}{}_1^3\, \xi_{ik}\, x_i\, x_k = \pm 1. \tag{3}$$

Il luogo geometrico dei punti Q è costituito da quadriche col centro in P; esse si denominano *quadriche degli allungamenti.* Se gli allungamenti sono tutti positivi, nel secondo membro si deve assumere l' unità positiva; se sono tutti negativi si deve invece assumere l' unità negativa: in entrambi i casi si ha una sola quadrica, e precisamente un *ellissoide.*

Se per alcune direzioni gli allungamenti sono positivi e per altre direzioni sono negativi, ammessa la loro continuità, vi saranno delle direzioni per le quali l' allungamento è nullo: il luogo di queste direzioni è il cono quadrico di equazione

$$\Sigma_{ik}{}_1^3\, \xi_{ik}\, x_i\, x_k = 0.$$

Esso chiamasi *cono di scorrimento* ed è il cono assintotico comune alle due quadriche, definite da (3): una col $+1$, l' altra col -1 per secondo membro; tali quadriche sono un *iperboloide a una falda* e un *iperboloide a due falde.*

La (2), risolta rispetto ad ε, fornisce

$$\varepsilon = \frac{\pm 1}{(Q - P)^2},$$

la quale formula, nota la quadrica, o le quadriche, degli allungamenti dice che *l' allungamento unitario corrispondente ad una direzione, comunque prescelta, è misurato dall' inverso del quadrato del raggio della quadrica, avente quella direzione, e in quanto al segno è sempre positivo (o sempre negativo) se si ha un ellissoide; se si hanno due quadriche distinte, il segno è determinato dalla quadrica che il raggio attraversa.*

Poichè si tratta di quadriche centrate, esistono tre assi principali trirettangoli; assumendo questi come assi di riferimento spariscono nella (3) i termini rettangoli, cioè (3) diviene:

$$\sum_1^3{}_i \, \xi_{ii} \, x_i^2 = \pm 1 ;$$

per questa terna di direzioni sono dunque nulli gli scorrimenti [N. 25]:

$$\xi_{i+1\, i+2} = 0 .$$

Segue la notevole proprietà: *tra le ∞^2 direzioni uscenti da P esistono sempre almeno tre trirettangole per cui gli scorrimenti mutui sono nulli, cioè si mantengono trirettangole nel passaggio dalla configurazione C alla configurazione $C + DC$.*

Queste *direzioni* si dicono *principali.*

Le considerazioni geometriche ora svolte con riferimento al tensore di deformazione Ξ, che è un tensore doppio simmetrico, si possono applicare a qualsiasi altro tensore doppio simmetrico, come ad esempio ai tensori di inerzia [N. 15] e ai tensori degli sforzi [N. 20]. Per ognuno di questi si hanno, in ogni punto delle quadriche direttrici (ellissoidi, per i tensori d'inerzia [Mecc. raz. N. 156 e 158]) o quadriche del tensore, che si possono ritenere immagini geometriche del tensore stesso. Gli assi di queste quadriche sono le *direzioni principali del tensore.*

Ciò significa, riferendoci per esempio al tensore degli sforzi [N. 20], che in ogni punto di un sistema continuo, comunque sollecitato, esistono sempre tra gli ∞^2 elementi superficiali contenenti quel punto almeno tre, fra loro ortogonali, che godono della proprietà di essere sollecitati normalmente.

Per il tensore unitario Δ [N. 8] le quadriche sono tutte sfere di raggio unitario.

27. - **Dilatazione cubica.** — Sia dS il volume di una particella infinitesima nella configurazione C del sistema continuo; passando alla configurazione $C + DC$ la particella stessa assumerà il volume:

$$dS + DdS = \left(1 + \frac{DdS}{dS}\right) dS = (1 + \Theta)\, dS,$$

avendo posto

$$\Theta = \frac{DdS}{dS}, \tag{1}$$

con che Θ — rapporto tra la variazione di volume e il volume primitivo — è il *coefficiente di dilatazione cubica.*

Come si esprime Θ mediante il tensore di deformazione Ξ? La risposta è la seguente: il coefficiente di dilatazione cubica è l'*invariante lineare* del tensore di deformazione, cioè:

$$\Theta = \sum_1^3{}_i\, \xi_{ii}\,. \tag{2}$$

Se T_{ik} sono le componenti di un tensore doppio qualunque $\boldsymbol{T}$ è facile constatare che la somma

$$\Sigma_i\, T_{ii}$$

è *invariante*, cioè indipendente dal sistema di riferimento.

Infatti, passando dal riferimento (y_i) al riferimento $(\overline{y}_i)$ si ha, applicando al tensore doppio $\boldsymbol{T}$ la (3) del N. 5:

$$T_{ik} = \sum_1^3{}_{jh}\, \overline{T}_{jh}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh}\,.$$

Da questa, facendo $k = i$ e sommando rispetto a i, si ottiene:

$$\sum_1^3{}_i\, T_{ii} = \sum_1^3{}_{jh}\, \overline{T}_{jh} \sum_1^3{}_i\, \alpha_{ij}\, \alpha_{ih}\,,$$

ma per (2) del N. 1 l'ultima sommatoria è δ_{jh}; abbiamo dunque:

$$\sum_1^3{}_i\, T_{ii} = \sum_1^3{}_{jh}\, \overline{T}_{jh}\, \delta_{jh} = \sum_1^3{}_j\, \overline{T}_{jj}\,, \qquad \text{c. v. d.}$$

Tale invariante è *lineare*.

Per dimostrare la formula (2) immaginiamo, per un momento, di riferirci ad assi paralleli alle direzioni principali nel punto P che si considera [N. 26] e consideriamo in C il parallelepipedo infinitesimo di spigoli dy_i, il cui volume sarà

$$dS = dy_1\, dy_2\, dy_3\,.$$

Nel passaggio dalla configurazione C alla configurazione $C + DC$, dy_i diviene [N. 24] $(1 + \xi_{ii})\, dy_i$ e i tre spigoli del primitivo parallelepipedo si mantengono, nel passaggio, trirettangoli [N. 26], per cui si ottiene ancora un parallelepipedo rettangolo il cui volume sarà

$$dS + DdS = (1 + \xi_{11})\,(1 + \xi_{22})\,(1 + \xi_{33})\, dS,$$

da cui, dividendo per dS e tenendo presente (1),

$$1 + \Theta = (1 + \xi_{11})\,(1 + \xi_{22})\,(1 + \xi_{33}).$$

Se si tien conto dell'ipotesi che si tratta di deformazioni infinitesime, per cui le componenti ξ_{ik} del tensore Ξ vanno trattate come infinitesimi di primo ordine, il secondo membro della precedente, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, diviene $1 + \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33}$ e quindi

$$\Theta = \sum_{1}^{3}{}_i \, \xi_{ii} .$$

Questa formula, stabilita con particolare riferimento cartesiano, è poi valida qualunque sia il riferimento, poichè come abbiamo costatato, il secondo membro è invariante. Con ciò resta dimostrata la (2).

Se si tiene presente (3) del N. 23 si ha

$$\xi_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial y_i}$$

e quindi la (2) si può altresì scrivere:

$$\Theta = \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{3}$$

In questo risultato si ha un' altra prova indiretta dell' invarianza di Θ, ciò che del resto è insito nel significato di Θ stesso.

Dal contenuto di questo e dei precedenti N.[i] 24, 25, 26 risulta che alterazioni di distanze, variazioni di angoli e di elementi di volume sono completamente caratterizzati mediante le componenti del tensore Ξ il quale a buon diritto può portare la denominazione di *tensore di deformazione,* precedentemente [N. 23] attribuitagli.

L' annullarsi del tensore Ξ è condizione caratteristica perchè il passaggio dalla configurazione C alla configurazione $C + DC$ sia un puro spostamento rigido [Mecc. raz. N. 274].

28. - **Tensore di elasticità.** — Per piccole deformazioni dei solidi elastici le sei componenti distinte $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$ del tensore Φ degli sforzi [N. 20] sono funzioni lineari e omogenee delle sei componenti $\xi_{ik} = \xi_{ki}$ del tensore Ξ di deformazione [N. 23 e Mecc. raz. N. 276] il che si può esprimere formalmente scrivendo:

$$\Phi_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh} \, c_{ik,\,jh} \, \xi_{jh} . \tag{1}$$

dove i coefficienti $c_{ik,\,jh}$, legati tra loro manifestamente dalle relazioni

$$c_{ik,\,jh} = c_{ki,\,jh} = c_{ik,\,hj} , \tag{2}$$

sono in numero di 36 distinti e dipendono solamente dalla natura elastica del materiale di cui è costituito il solido.

I coefficienti $c_{ik,jh}$ si possono interpretare come componenti di un tensore quadruplo c, che si può denominare ***tensore di elasticità*** in quanto che dipende unicamente delle qualità elastiche del solido.

La (1) esprime che il tensore degli sforzi Φ risulta dalla composizione [N. 13] del tensore c di componenti $c_{ik,jh}$, col tensore di deformazione Ξ di componenti ξ_{jh} mediante la saturazione degli indici j e h.

Si noti che un tensore quadruplo generale ha $3^4 = 81$ componenti cartesiane [N. 7]; il numero delle componenti distinte del tensore di elasticità, che è pure quadruplo, si riduce, come si disse, a 36.

Se si ammette che le forze elastiche sieno conservative, esiste un *potenziate elastico*, lavoro unitario di volume, forma quadratica definita negativa nelle sei componenti del tensore di deformazione Ξ [Cfr. ad esempio CESÀRO « Introduzione alla teoria matematica della elasticità » Torino, Bocca, 1894]. I coefficenti di questa forma sono le componenti del tensore elastico c; precisamente chiamando $2U$ il potenziale elastico si ha:

$$2U = \sum_{1}^{3}{}_{ik,jh}\, c_{ik,jh}\, \xi_{ik}\, \xi_{jh}\,, \tag{3}$$

avendosi ora, oltre le (2), anche la simmetria rispetto alle due coppie di indici, cioè

$$c_{ik,jh} = c_{jh,ik}\,, \tag{4}$$

per cui il numero delle componenti distinte e non nulle del tensore di elasticità c si riduce a 21.

In tal caso si ha:

$$\Phi_{ik} = \frac{\partial U}{\partial \xi_{ik}}\,, \tag{5}$$

che sostituisce la relazione, più generale, (1).

Infatti, dalla (3) derivando rispetto a ξ_{pq} si ottiene, tenendo presenti le (4) e le (1):

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\partial U}{\partial \xi_{pq}} &= \sum_{1}^{3}{}_{ikjh}\, c_{ik,jh} \left(\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial \xi_{pq}}\, \xi_{jh} + \xi_{ik}\, \frac{\partial \xi_{jh}}{\partial \xi_{pq}} \right) \\ &= \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, c_{pq,jh}\, \xi_{jh} + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, c_{ik,pq}\, \xi_{ik} \\ &= \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, (c_{pq,jh} + c_{jh,pq})\, \xi_{jh} = 2 \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, c_{pq,jh}\, \xi_{jh} = 2\,\Phi_{pq}\,, \end{aligned}$$

c. v. d.

Se il solido presenta, riguardo alla sua natura elastica, dei piani oppure degli assi di simmetria, come nei corpi cristallini, il numero delle componenti distinte e non nulle del tensore c diminuisce ancora, fino a ridursi a due sole nel caso della isotropia completa [CESÀRO, loco citato a pag. 37].

Si rilevi dalla (3) che $2U$ risulta della composizione [N. 13] del tensore quadruplo c col quadrato [N. 12] del tensore doppio Ξ, mediante la saturazione di tutti gli indici comuni, cioè mediante *saturazione completa*: è perciò che il risultante di questa composizione è un invariante.

29. - **Equazioni della meccanica dei solidi elastici.** — Le equazioni indefinite della statica dei solidi elastici si deducono da quelle dei sistemi continui, (1) del N. 21, attribuendo alle componenti Φ_{ik} del tensore Φ degli sforzi le espressioni (1) del N. 28, che riportiamo

$$\Phi_{ik} = \sum_1^3{}_{jh}\, c_{ik,\,jh}\, \xi_{jh}\,.$$

Se si nota che, per (3) del N. 23,

$$2\,\xi_{jh} = \frac{\partial v_j}{\partial y_h} + \frac{\partial v_h}{\partial y_j}$$

si ha ancora

$$(1)\qquad \Phi_{ik} = \sum_1^3{}_{jh}\, c_{ik,\,jh}\, \frac{\partial v_j}{\partial y_h}\,.$$

Infatti, avendosi

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{jh}\, c_{ik,\,jh}\left(\frac{\partial v_j}{\partial y_h} + \frac{\partial v_h}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{jh}\, c_{ik,\,jh}\,\frac{\partial v_j}{\partial y_h} + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{jh}\, c_{ik,\,jh}\,\frac{\partial v_h}{\partial y_j}\,,$$

scambiando nell'ultima sommatoria j con h e tenendo conto di (2) del N. 28 si ha

$$\Phi_{ik} = \sum_1^3{}_{jh}\, c_{ik,\,jh}\, \frac{\partial v_j}{\partial y_h}\,, \qquad \text{c. v. d.}$$

Sostituendo nella citata (1) del N. 21 si ottengono per l'equilibrio elastico, nella ipotesi che il solido sia elasticamente omogeneo cioè il tensore c di elasticità sia costante, le seguenti equazioni indefinite:

$$(2)\qquad \varrho F_i = \sum_1^3{}_{jhk}\, c_{ik,\,jh}\, \frac{\partial^2 v_j}{\partial y_h\, \partial y_k}\,.$$

Sopra la superficie σ, che costituisce il contorno del solido, applicando la (1) del N. 20, dovranno aversi le relazioni

$$(3) \qquad f_i = \sum_1^3{}_{jhk} c_{ik,jh} \frac{\partial v_j}{\partial y_h} n_k ,$$

designando f_i le componenti della forza superficiale unitaria.

Le tre equazioni indefinite (2) sono di second' ordine nelle tre componenti di spostamento v, mentre le equazioni al contorno (3) sono di primo ordine nelle stesse componenti.

Le equazioni (2) e (3) valgono anche nella ipotesi di esistenza di un potenziale delle forze elastiche; basta in questo caso tenere presenti, oltre le (2) del N. 28, anche le (4).

Le equazioni, indefinite e al contorno, delle vibrazioni elastiche del solido si ottengono dalle (2) e (3) sostituendo a F_i e f_i rispettivamente $F_i - \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}$ e $f_i - \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}$ [Cfr. la fine del N. 21].

CAPITOLO V.

Rappresentazione dei tensori in coordinate generali

30. - **Coordinate generali.** — Designino y_i ($i = 1, 2, 3$) le coordinate cartesiane dei punti dello spazio; sieno esse funzioni di altre tre variabili x_1, x_2, x_3:

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

a determinante funzionale

$$D = \frac{d(y_1\, y_2\, y_3)}{d(x_1\, x_2\, x_3)} = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right\|$$

diverso da zero. In tale circostanza vi è corrispondenza biunivoca tra le terne di valori y_i e quelle dei valori x_k, per cui quest'ultime si possono ritenere funzioni, univocamente determinabili, delle prime:

$$x_k = x_k(y_1, y_2, y_3). \tag{2}$$

La eliminazione delle x tra queste e le (1) da luogo a identità, e così pure la eliminazione delle y tra le stesse (1) e (2).

Le equazioni

$$y_i = \text{costante}$$

rappresentano piani paralleli al piano $y_i = 0$; le equazioni

$$x_k = \text{costante}$$

rappresentano delle superficie; un punto qualsiasi è determinato dalla intersezione di tre piani paralleli ai tre piani coordinati, esso può altresì essere determinato come intersezione di tre superficie $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = c_3$.

Perciò la posizione di un punto dello spazio, oltre che dalle sue coordinate cartesiane y_i, può essere individuata dai valori attribuiti a x_1, x_2, x_3. Si chiameranno *coordinate generali* le x_k e le (1) e le equivalenti (2) esprimono il legame tra queste e le coordinate cartesiane y_i.

Superficie coordinate sono a dirsi le superficie $x_k =$ costante e *linee coordinate* le intersezioni di due distinte superficie coordinate; in coordinate cartesiane le superficie coordinate sono piani paralleli ai piani coordinati e le linee coordinate sono le rette parallele ai tre assi del sistema di riferimento.

31. - Esempi: coordinate sferiche e coordinate cilindriche.

Se nella (1) del N. 1 si pone $\overline{y}_k = x_k$ le nuove coordinate sono ancora cartesiane, non si è che mutato il riferimento; in tal caso le (1) e (2) del numero precedente coincidono colle (1) e (1') del N. 1. Dunque nelle considerazioni che andiamo facendo saranno incluse, come caso molto particolare, le conclusioni dei Capitoli precedenti.

Poniamo

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 \operatorname{sen} x_2 \cos x_3, \\ y_2 = x_1 \operatorname{sen} x_2 \operatorname{sen} x_3, \\ y_3 = x_1 \cos x_2 . \end{cases}$$

In tal caso si ha

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x_2 \cos x_3 & x_1 \cos x_2 \cos x_3 & -x_1 \operatorname{sen} x_2 \operatorname{sen} x_3 \\ \operatorname{sen} x_2 \operatorname{sen} x_3 & x_1 \cos x_2 \operatorname{sen} x_3 & x_1 \operatorname{sen} x_2 \cos x_3 \\ \cos x_2 & -x_1 \operatorname{sen} x_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x_1^2 \operatorname{sen} x_2 \cos^2 x_2 + x_1^2 \operatorname{sen}^3 x_2 = x_1^2 \operatorname{sen} x_2 .$$

Risolvendo le (1) rispetto a x_1, x_2, x_3 si ottiene:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \\ x_2 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{y_3}, \\ x_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y_2}{y_1} . \end{cases}$$

Infatti, dalle (1) quadrando e sommando, si ottiene

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = x_1^2 \operatorname{sen}^2 x_2 (\cos^2 x_3 + \operatorname{sen}^2 x_3) + x_1^2 \cos^2 x_2$$
$$= x_1^2 (\operatorname{sen}^2 x_2 + \cos^2 x_2) = x_1^2 ,$$

da cui, estraendo la radice quadrata, si ottiene la prima delle (2).

Dalle due prime delle (1), quadrando, sommando ed estraendo le radice quadrata, si ottiene

$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = x_1 \operatorname{sen} x_2$$

e dividendo questa per la terza di (1), si ottiene la seconde di (2).

Infine, dividendo la seconda di (1) per la prima, si ottiene senz'altro la terza di (2).

Colle limitazioni

$$0 \leq x_1 \leq \infty , \qquad 0 \leq x_2 \leq \pi , \qquad 0 \leq x_3 \leq 2\pi$$

è stabilita una corrispondenza biunivoca tra le due terne di variabili y_i e x_k.

Le superficie $x_1 =$ costante sono sfere concentriche col centro nell'origine degli assi cartesiani. Ciò scende immediatamente dalla prima delle (2).

La seconda delle (2) mostra che le superficie $x_2 =$ costante sono coni rotondi col vertice nell'origine e aventi per asse l'asse y_3. Infine dalla terza delle (2) scende che le superficie $x_3 =$ costante sono i piani del fascio avente per asse l'asse y_3.

Le linee

$$x_2 = \text{costante} \qquad x_3 = \text{costante}$$

sono i raggi della stella con centro nell'origine; le linee

$$x_3 = \text{costante} , \qquad x_1 = \text{costante}$$

sono circonferenze *(meridiani)* aventi il centro nell'origine *(polo)* e complanari coll'asse y_3 *(asse polare)*; infine le linee

$$x_1 = \text{costante} , \qquad x_2 = \text{costante}$$

sono circonferenze *(paralleli)* col centro sull'asse y_3 e normali all'asse stesso.

Le coordinate x_1, x_2, x_3 si dicono *polari* o anche *sferiche*: x_1 misura la distanza del punto P dal polo O e dicesi *raggio vettore*; x_2 è l'angolo che il raggio $\overrightarrow{OP}$ forma col semiasse positivo della y_3

e si chiama ***collatitudine;*** x_3 è l'angolo che il semipiano formato dal punto P coll'asse y_3 determina col semipiano determinato da y_3 col semiasse positivo y_1 e si denomina ***longitudine.***

Nell'uso comune raggio vettore, collatitudine e longitudine si indicano con ϱ, ϑ, ψ; noi per l'inquadramento colle considerazioni generali manterremo le indicate lettere x_1, x_2, x_3.

Un altro esempio notevole, e altrettanto comune, di coordinate non cartesiane è offerto dalle ***coordinate cilindriche.*** La forma più generale di tali coordinate si ottiene ponendo:

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2), \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

In tal caso è

$$D = \frac{d(y_1 y_2)}{d(x_1 x_2)},$$

che si suppone diverso da zero.

In sostanza la trasformazione riguarda le sole coppie di variabili y_1, y_2 e x_1, x_2. Immaginando di risolvere le (3) rispetto alle x_k, si avrà

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, y_2), \\ x_2 &= x_2(y_1, y_2), \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Il nuovo sistema di coordinate prende il nome di ***cilindriche*** perchè, come scende dalle (4), le superficie $x_1 =$ costante e $x_2 =$ costante sono cilindri colle generatrici normali al piano $y_3 = 0$; mentre le superficie $x_3 =$ costante sono piani paralleli al piano $y_3 = 0$. Le linee $x_2 =$ costante, $x_3 =$ costante sono le linee piane parallele al piano $y_3 = 0$ e così pure le linee $x_1 =$ costante, $x_3 =$ costante; infine le linee $x_1 =$ costante, $x_2 =$ costante sono rette normali al piano $y_3 = 0$.

Se, in particolare,

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos x_2, \\ y_2 &= x_1 \operatorname{sen} x_2, \\ y_3 &= x_3, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

le prime due sono le consuete formule di trasformazione nel piano $y_3 = 0$ tra le coordinate cartesiane y_1, y_2 e le coordinate polari, in cui x_1 è il raggio vettore e x_2 l'anomalia.

Le superficie $x_1 =$ costante sono cilindri rotondi coassiali, aventi per asse comune l'asse y_3; le superficie $x_2 =$ costante sono i piani del fascio di asse y_3. Ciò scende immediatamente risolvendo le (5), rispetto alle x_k, con che si ottiene:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \\ x_2 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y_2}{y_1}, \\ x_3 = y_3. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} x_1 \geqq 0 \\ 0 \leqq x_2 \leqq 2\pi \end{array} \right)$$

Le coordinate x_i si chiamano *semipolari*.

32. - **Elemento lineare.** — Chiamasi *elemento lineare* dello spazio la distanza tra un punto P, di coordinate cartesiane y_i e un punto P', infinitamente prossimo, di coordinate cartesiane $y_i + dy_i$; ne viene che, indicando con ds l'elemento lineare, si avrà:

$$\text{(1)} \qquad ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_i\, dy_i^2.$$

Questa relazione fornisce il quadrato dell'elemento lineare in coordinate cartesiane; vediamo ora quale sarà la sua espressione in coordinate generali.

Riferendoci a (1) del N. 30, si ha differenziando,

$$dy_i = \sum_{1}^{3}{}_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{1}^{3}{}_h \frac{\partial y_i}{\partial x_h} dx_h,$$

per cui, si può scrivere:

$$dy_i^2 = \sum_{1}^{3}{}_{jh} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_h} dx_j\, dx_h,$$

e sostituendo in (1), dopo di aver posto

$$\text{(2)} \qquad a_{jh} = a_{hj} = \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_h},$$

si ottiene in definitiva la seguente espressione pel quadrato dell'elemento lineare in coordinate generali:

$$\text{(3)} \qquad ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a_{jh}\, dx_j\, dx_h.$$

È una forma differenziale quadratica nei differenziali delle variabili x, i coefficienti risultando definiti da (2).

Nel caso particolare in cui $x_i = \overline{y}_i$, essendo allora [N. 1, (1)]

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial \overline{y}_j} = \alpha_{ij},$$

la (2), tenuto conto di (2) del N. 1, diviene:

$$(4) \qquad a_{jh} = \sum_1^3{}_i\, \alpha_{ij}\, \alpha_{ih} = \delta_{jh},$$

per cui (3) da luogo a

$$ds^2 = \sum_1^3{}_{jh}\, \delta_{jh}\, dx_j\, dx_h = \sum_1^3{}_j\, dx_j^2\,;$$

si ritrova, come doveva essere, che l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, nelle nuove coordinate, che sono ancora cartesiane, è somma dei quadrati dei differenziali delle coordinate.

Mostra la (4) che, in coordinate cartesiane le sei quantità $a_{jh} = a_{hj}$ coincidono colle componenti del tensore fondamentale o unitario Δ [N. 8]; in coordinate generali le predette sei quantità si chiameranno le *componenti covarianti* dello stesso tensore Δ.

Riferendoci alle (1) del N. 31, l'espressione del quadrato dell'elemento lineare in coordinate sferiche è il seguente:

$$(5) \qquad ds^2 = dx_1^2 + x_1^2\, dx_2^2 + x_1^2 \operatorname{sen}^2 x_2\, dx_3^2\,;$$

mentre in coordinate cilindriche [N. 31, (3)] è

$$(6) \qquad ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + 2a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2 + dx_3^2\,,$$

essendo

$$a_{11} = \sum_1^2{}_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)^2, \qquad a_{22} = \sum_1^2{}_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)^2, \qquad a_{12} = \sum_1^2{}_i \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial y_i}{\partial x_2}.$$

In particolare, per le coordinate semipolari [N. 31, (5)], si ha:

$$(7) \qquad ds^2 = dx_1^2 + x_1^2\, dx_2^2 + dx_3^2\,.$$

33. - **Componenti generali del tensore fondamentale.** — Abbiamo definito nel numero precedente *componenti covarianti* del tensore fondamentale Δ in coordinate generali, i coefficienti della forma quadratica (3) che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare

dello spazio nelle medesime coordinate, coefficienti che sono legati alle formole di passaggio tra le coordinate generali e quelle cartesiane dalle relazioni (2):

$$(1) \qquad a_{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_h}.$$

Il discriminante della citata forma (3) è il determinante

$$(2) \qquad a = \| a_{jh} \| = D^2.$$

Infatti, la (1) mostra che il determinante a è il quadrato [An. Mat. N. 25] del determinante funzionale

$$D = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right\|.$$

Dalla (2), tenuto conto che è $D \neq 0$ [N. 30], scende che è sempre $a > 0$, cioè la citata forma (3) è definita positiva.

Poniamo ora

$$(3) \qquad a^{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_\nu}.$$

È facile constatare che $a^{ik} = a^{ki}$ sono gli elementi reciproci di (1) nel determinante a.

Infatti, facendo nella (1) $j = i$, indi moltiplicandola membro a membro con (3), si ha:

$$\sum_{1}^{3}{}_{i} a_{ih} a^{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{i\mu\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} \frac{\partial x_k}{\partial y_\nu}$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{\mu\nu} \frac{\partial x_k}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_h} \sum_{1}^{3}{}_{i} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu},$$

ma è

$$\sum_{1}^{3}{}_{i} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_\nu} = \frac{\partial y_\mu}{\partial y_\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

per cui

$$\sum_{1}^{3}{}_{i} a_{ih} a^{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial x_k}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_h} = \sum_{1}^{3}{}_{\mu} \frac{\partial x_k}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_h} = \frac{\partial x_k}{\partial x_h} = \delta_{hk}.$$

Sono queste condizioni caratteristiche [An. Mat. N.[i] 23; 24, 1°; 26] perchè a^{ik} sieno gli elementi reciproci di a_{ik} nel determinante a, c. v. d.

Se, in particolare, riferendoci al N. 1 si fa $x_i = \bar{y}_i$, dalle (1') del N. 1 scende

$$\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial y_i} = \alpha_{ih},$$

e per queste le (3) divengono, tenendo conto di (2) del N. 1,

$$a^{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, \alpha_{\nu i}\, \alpha_{\nu k} = \delta_{ik}.$$

Dunque, quando si tratta di coordinate cartesiane, anche le a^{ik}, come già le a_{ik} [N. 32, (4)], coincidono colle componenti δ_{ik} del tensore fondamentale Δ.

Definiremo le sei quantità $a^{ik} = a^{ki}$, *componenti contravarianti* del tensore fondamentale Δ.

Dunque in coordinate generali il tensore fondamentale Δ può rappresentarsi o mediante le *componenti covarianti* a_{ik}, oppure mediante le *componenti contravarianti* a^{ik}; in coordinate cartesiane $a^{ik} = a_{ik} = \delta_{ik}$, e si ha un'unica rappresentazione.

34. - **Gradiente di uno scalare in coordinate generali.** — Sia $f(y_1, y_2, y_3)$ una funzione, o tensore di ordine zero [N. 7], dei punti dello spazio, quando questi sono riferiti a un sistema cartesiano. Quando si passa a coordinate generali, basta esprimere la f per le x_i, colla eliminazione delle y_i, per mezzo delle (1) del N. 30.

Consideriamo ora il vettore

$$v = \text{grad } f, \tag{1}$$

le cui componenti cartesiane sono [N. 16]:

$$Y_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}. \tag{2}$$

Se si considera la funzione f dipendente dalle x per mezzo delle y, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{1}^{3}{}_{i}\, \frac{\partial f}{\partial y_i}\, \frac{\partial y_i}{\partial x_k},$$

ovvero, ponendo

$$X_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{3}$$

e tenendo conto di (2), si ottiene:

$$(4) \qquad X_k = \sum_1^3{}_i\, Y_i \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

Se, riferendoci al N. 1, facciamo $x_k = \overline{y}_k$ si hanno le (1) del N. 1 e quindi

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = a_{ik};$$

la (4) in tal caso diviene

$$X_k = \sum_1^3{}_i\, Y_i\, a_{ik},$$

cioè viene a concidere con (1') del N. 2; essa esprime che X_k sono le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto al sistema di coordinate (cartesiane) $x_k = \overline{y}_k$.

Se le x_k non sono coordinate cartesiane le X_k definite da (4) sono in corrispondenza univoca colle componenti cartesiane Y_i del vettore $\boldsymbol{v}$ (anzi — vedremo tra poco — biunivoca) e quindi servono a individuare il vettore stesso in coordinate generali. Le X_k si denominano *componenti covarianti* del vettore $\boldsymbol{v}$; come si è rilevato esse coincidono colle componenti cartesiane se x_k sono coordinate, anzichè generali, cartesiane.

Se si risolvono (4) rispetto a Y_i si ottiene

$$(4') \qquad Y_i = \sum_1^3{}_k\, X_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i}.$$

Infatti, moltiplicando (4) per $\frac{\partial x_k}{\partial y_j}$ e sommando rispetto a k, si ricava

$$\sum_1^3{}_k\, X_k \frac{\partial x_k}{\partial y_j} = \sum_1^3{}_{ik}\, Y_i \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_j} = \sum_1^3{}_i\, Y_i \sum_1^3{}_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_j} = \sum_1^3{}_i\, Y_i \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \sum_1^3{}_i\, Y_i\, \delta_{ij} = Y_j;$$

cambiando, nel risultato finale, j in i si ha (4'), c. v. d.

A (4') del resto si può giungere anche direttamente, partendo da (2), osservando che, ritenendo f dipendente dalle y per mezzo delle x, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_1^3{}_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i},$$

da cui, per (2) e (3), si ha senz'altro (4').

Da (4) e (4') risulta l'annunciata corrispondenza biunivoca tra le componenti cartesiane Y_i del vettore $\boldsymbol{v}$ e le sue componenti covarianti X_k.

35. - **Componenti covarianti di un vettore.** — Le relazioni (4) e (4′) del numero precedente, e che qui riportiamo:

$$
(1) \qquad \begin{cases} X_k = \sum_{1}^{3}{}_i\, Y_i \dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}, \\ Y_i = \sum_{1}^{3}{}_k\, X_k \dfrac{\partial x_k}{\partial y_i}, \end{cases}
$$

che legano le componenti cartesiane Y_i del vettore v alle componenti covarianti X_k, in coordinate generali furono stabilite nell'ipotesi che v sia il gradiente di una funzione f. Poichè: *a)* in esse non vi è alcuna traccia della funzione f, cioè sono indipendenti da f; *b)* nel caso in cui x_k sono, anzichè generali, coordinate cartesiane, avendosi [N. 1]

$$
\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \alpha_{ik},
$$

le (1) vengono a coincidere colle relazioni [N. 2, (1) e (1′)] che legano le componenti cartesiane del vettore v rispetto ai due riferimenti; si è indotti ad assumere X_k come *componenti covarianti* del vettore v col riferimento alle coordinate generali. Le (1) stesse sono le formule che permettono il passaggio dalle componenti cartesiane alle covarianti e viceversa, una volta note le relazioni tra le y e le x.

36. - **Spostamento infinitesimo.** — Si consideri il vettore

$$
dP = P' - P,
$$

essendo P un punto, comunque prescelto, di coordinate cartesiane y_i e P' un altro punto, infinitamente prossimo a P, di coordinate $y_i + dy_i$. Tale vettore rappresenta uno *spostamento infinitesimo* e il suo modulo è l'elemento lineare il cui quadrato, ds^2, si è considerato al N. 32.

Le componenti cartesiane di dP sono dy_i.

Passiamo ora alle coordinate generali: dette x_k le coordinate generali del punto P, quelle del punto P' saranno $x_k + dx_k$, essendo:

$$
(1) \qquad dx_k = \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial x_k}{\partial y_i}\, dy_i .
$$

Se x_k fossero coordinate cartesiane, si avrebbe [N. 1]

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \alpha_{ik},$$

e le (1) sarebbero le relazioni che legano tra loro le componenti di uno stesso vettore rispetto a due differenti riferimenti cartesiani [N. 2, (1)].

In coordinate generali, le dx_k continuano, per mezzo di (1) a individuare il vettore dP e si chiamano *componenti contravarianti* del vettore dP.

Poichè si ha anche

$$dy_i = \sum_{1}^{3}{}_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k; \tag{2}$$

queste relazioni non sono che le (1) risolute rispetto alle componenti cartesiane di dP.

La risoluzione formale si può ottenere moltiplicando (1) per $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ e sommando poi rispetto a k; si ottiene:

$$\sum_{1}^{3}{}_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k} dx_k = \sum_{1}^{3}{}_{ik} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} dy_i = \sum_{1}^{3}{}_i dy_i \sum_{1}^{3}{}_k \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial y_j}{\partial y_i} dy_i = dy_j,$$

la quale coincide colla (2), c. v. d.

37. - **Componenti contravarianti di un vettore.** — Se in (1) e in (2) del numero precedente si pone

$$dx_k = X^k \quad \text{e} \quad dy_i = Y^i,$$

si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} X^k = \sum_{1}^{3}{}_i Y^i \dfrac{\partial x_k}{\partial y_i}, \\ Y^i = \sum_{1}^{3}{}_k X^k \dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}. \end{cases} \tag{1}$$

Se x_k sono coordinate cartesiane, si è ripetutamente visto [N. 1] che, essendo

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \alpha_{ik},$$

le (1) vengono a coincidere con (1) e (1') del N. 2 cioè esprimono essere X^k e Y^i le componenti di un medesimo vettore rispetto ai due differenti sistemi cartesiani di riferimento.

Se x_k sono coordinate generali, e non più cartesiane, le X^k, definite da (1) si diranno, con referenza alle coordinate x_k, le *componenti contravarianti* del vettore le cui componenti cartesiane sono Y^i.

38. - Relazioni tra componenti covarianti e componenti contravarianti di uno stesso vettore. — Le (1) del N. 35 esprimono le relazioni tra componenti covarianti e componenti cartesiane di uno stesso vettore $\boldsymbol{v}$; le (1) del N. 37 le relazioni tra le componenti contravarianti e le componenti cartesiane. Notando che

$$Y_i = Y^i, \tag{1}$$

facilmente si ottengono le seguenti relazioni tra componenti covarianti e componenti contravarianti dello stesso vettore $\boldsymbol{v}$:

$$\left\{\begin{aligned} X_k &= \sum_1^3{}_i\, a_{ik}\, X^i, \\ X^i &= \sum_1^3{}_k\, a^{ik}\, X_k. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Infatti, eliminando nella prima di (1) del N. 35 le Y_i per mezzo di (1) e di seconda di (1) del N. 37, si ottiene, tenendo presente (1) del N. 33,

$$X_k = \sum_1^3{}_{il}\, X^l \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \sum_1^3{}_l\, X^l \sum_1^3{}_i \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \sum_1^3{}_l\, a_{kl}\, X^l,$$

che è la prima di (2).

Per dimostrare la seconda di (2), si elimina Y^i per mezzo di (1) e della seconda di (1) del N. 35; tenendo presente (3) del N. 33 si ha:

$$X^k = \sum_1^3{}_{il}\, X_l \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \sum_1^3{}_l\, X_l \sum_1^3{}_i \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \sum_1^3{}_l\, a_{kl}\, X_l,$$

che è la seconda di (2), c. v. d.

Se, in particolare x_k sono coordinate cartesiane, avendosi [N. 33]

$$a_{ik} = a^{ik} = \delta_{ik},$$

le (2) si riducono a

$$X_k = X^k,$$

cioè le componenti covarianti e le componenti contravarianti coincidono entrambe colle cartesiane.

39. - Componenti covarianti e componenti contravarianti del prodotto tensoriale di due vettori. — Sieno $\underset{1}{V}$ e $\underset{2}{V}$ due vettori, $\underset{1}{Y_i}$ e $\underset{2}{Y_k}$ le corrispondenti componenti cartesiane; ponendo:

$$Y_{ik} = \underset{1}{Y_i} \cdot \underset{2}{Y_k}, \tag{1}$$

risulta definito, mediante le sue componenti cartesiane Y_{ik}, un tensore doppio Z che si è chiamato [N. 3] *prodotto tensoriale* dei due vettori $\underset{1}{V}$ e $\underset{2}{V}$.

Passando dalle coordinate cartesiane a un sistema di coordinate generali diciamo $\underset{1}{X_j}$ le componenti covarianti di $\underset{1}{V}$ [N. 35] e $\underset{2}{X_h}$ quelle del vettore $\underset{2}{V}$; ponendo:

$$X_{jh} = \underset{1}{X_j} \cdot \underset{2}{X_h}, \tag{2}$$

si hanno le relazioni seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} X_{jh} &= \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, Y_{ik} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_h}, \\ Y_{ik} &= \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, X_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_h}{\partial y_k}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Infatti, applicando alle componenti covarianti dei vettori $\underset{1}{V}$ e $\underset{2}{V}$ le prime di (1) del N. 35, si hanno le relazioni

$$\underset{1}{X_j} = \sum_{1}^{3}{}_i\, \underset{1}{Y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad \underset{2}{X_h} = \sum_{1}^{3}{}_k\, Y_k \frac{\partial y_k}{\partial x_h};$$

da queste, moltiplicando membro a membro, si ottiene:

$$\underset{1}{X_j} \cdot \underset{2}{X_h} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, \underset{1}{Y_i} \cdot \underset{2}{Y_k} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_h},$$

la quale, per (1) e (2), coincide colla prima di (3).

In modo analogo si dimostra la seconda di (3).

Se dei vettori $\underset{1}{V}$ e $\underset{2}{V}$ si introducono le componenti contravarianti $\underset{1}{X^j}$ e $\underset{2}{X^h}$ [N. 37], ponendo:

$$X^{jh} = \underset{1}{X^j} \cdot \underset{2}{X^h}, \tag{4}$$

si hanno le seguenti relazioni:

$$
(5) \qquad \begin{cases} X^{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, Y^{ik} \dfrac{\partial x_j}{\partial y_i} \dfrac{\partial x_h}{\partial y_k}, \\[2ex] Y^{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, X^{jh} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_h}, \end{cases}
$$

essendo

$$
(6) \qquad Y^{ik} = \underset{1}{Y^i} \cdot \underset{2}{Y^k},
$$

dove si sono ora indicati con $\underset{1}{Y^i}$ le componenti cartesiane di $\underset{1}{V}$ e con $\underset{2}{Y^k}$ quelle del vettore $\underset{2}{V}$. Naturalmente è

$$
(7) \qquad \underset{1}{Y^i} = \underset{1}{Y_i}, \qquad \underset{2}{Y^k} = \underset{2}{Y_k},
$$

per cui da (1) e (6) scende

$$
(8) \qquad Y^{ik} = Y_{ik}.
$$

A giustificazione di (5), applichiamo alle componenti contravarianti dei vettori $\underset{1}{V}$ e $\underset{2}{V}$ le prime di (1) del N. 37; si ottengono le relazioni

$$
\underset{1}{X^j} = \sum_{1}^{3}{}_i\, \underset{1}{Y^i} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, \qquad \underset{2}{X^h} = \sum_{1}^{3}{}_k\, \underset{2}{Y^k} \frac{\partial x_h}{\partial y_k};
$$

moltiplicando membro a membro si ha

$$
\underset{1}{X^j} \cdot \underset{2}{X^h} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, \underset{1}{Y^i} \cdot \underset{2}{Y^k} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial y_k},
$$

la quale, per (4) e (6), coincide colla prima di (5).

In modo analogo si dimostra la seconda di (5).

Se, in particolare, x_k sono coordinate cartesiane, avendosi [N. 1]

$$
\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \alpha_{ij}
$$

le (3) divengono:

$$
(9) \qquad \begin{cases} X_{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, Y_{ik}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh}, \\[1ex] Y_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, X_{jh}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh}; \end{cases}
$$

queste rientrano nelle (3) e (3′) del N. 5 ed esprimono le relazioni che legano le componenti cartesiane di uno stesso tensore doppio riferito a due differenti terne. È perciò, ripristinando a x_k il significato di coordinate generali, che X_{jh} legate al Y_{ik} dalle (3) si denominano le *componenti covarianti* del tensore doppio $\boldsymbol{Z}$, prodotto tensoriale dei vettori $\underset{1}{\boldsymbol{V}}$ e $\underset{2}{\boldsymbol{V}}$, le cui componenti cartesiane sono Y_{jk}.

Se ora ci si riferisce alle (5), si vede tosto, tenendo conto di (7) e (8), che se x_k sono coordinate cartesiane, si ha

$$X^{jh} = X_{jh} \,. \tag{10}$$

Se le x_k sono coordinate generali, le X^{jh} si chiamano le *componenti contravarianti* del tensore doppio $\boldsymbol{Z}$, le cui componenti cartesiane sono $Y^{ik} = Y_{ik}$.

Le formule (3) esprimono le relazioni che intendono tra le componenti covarianti di $\boldsymbol{Z}$ e le componenti cartesiane, le formule (5) danno le relazioni tra le componenti contravarianti di $\boldsymbol{Z}$ e le componenti cartesiane.

Quali sono le relazioni tra componenti covarianti e componenti contravarianti?

Sono le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} X_{jh} &= \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ij}\, a_{kh}\, X^{ik} \,, \\ X^{ik} &= \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{ij}\, a^{kh}\, X_{jh} \,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Infatti, nella prima di (3) eliminando Y_{ik} per mezzo di (8) e della seconda di (5), si ottiene:

$$\begin{aligned} X_{jh} &= \sum_{1}^{3}{}_{ik\,pq} X^{pq} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \frac{\partial y_k}{\partial x_q} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \\ &= \sum_{1}^{3}{}_{pq} X^{pq} \sum_{1}^{3}{}_{i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_p} \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \frac{\partial y_k}{\partial x_q} \end{aligned}$$

e per (1) del N. 33,

$$X_{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a_{jp}\, a_{hq}\, X^{pq},$$

che è la prima di (11).

Per dimostrare la seconda di (11) si può, seguendo un cammino analogo [Cfr. N. 38] partire dalla prima di (5) ed eliminare Y^{ik}, per mezzo di (8) e della seconda di (3) e tenere infine presente (3) del N. 33. Ma si può anche dedurre la seconda di (11) dalla prima nel seguente modo. Moltiplichiamo la prima di (11) per $a^{jp}\,a^{hq}$ e sommiamo rispetto a j e h; si ottiene:

$$\sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{jp}\, a^{hq}\, X_{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, X^{ik} \sum_{1}^{3}{}_{j}\, a_{ij}\, a^{jp} \sum_{1}^{3}{}_{h}\, a_{kh}\, a^{hq}\,;$$

ma è [N. 33]:

$$\sum_{1}^{3}{}_{j}\, a_{ij}\, a^{jp} = \delta_{ip}\,, \quad \sum_{1}^{3}{}_{h}\, a_{kh}\, a^{hq} = \delta_{kq}\,,$$

per cui

$$\sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{jp}\, a^{hq}\, X_{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, X^{ik}\, \delta_{ip}\, \delta_{kq} = X^{pq}, \qquad \text{c. v. d.}$$

Nel caso particolare in cui x_k sono coordinate cartesiane, si ha [N. 33]

$$a_{ij} = a^{ij} = \delta_{ij}\,,$$

ed allora le (11) si riducono a

$$X_{jh} = X^{jh}\,,$$

cioè le componenti covarianti del tensore $\boldsymbol{Z}$ coincidono colle componenti contravarianti. Ma se x_k sono effettivamente coordinate generali, cioè non cartesiane, le componenti covarianti sono distinte da quelle contravarianti, e si passa dalle une alle altre per mezzo delle relazioni (11).

40. - **Componenti, covarianti e contravarianti, di un tensore qualunque.** — Le relazioni (3) del numero precedente, tra componenti covarianti e componenti cartesiane del tensore doppio $\boldsymbol{Z}$, e le relazioni (5) tra componenti cartesiane e componenti contravarianti, nonchè le (11), che legano componenti covarianti alle componenti contravarianti, sono state ricavate nell'ipotesi che il tensore doppio $\boldsymbol{Z}$ sia il prodotto tensoriale di due vettori $\underset{1}{\boldsymbol{V}}$ e $\underset{2}{\boldsymbol{V}}$.

Si rilevi che nelle citate relazioni (3), (5) e (11) non vi è alcuna traccia di componenti, di qualsiasi specie, dei predetti vettori $\underset{1}{\boldsymbol{V}}$ e $\underset{2}{\boldsymbol{V}}$ e si rammenti che, come si è rilevato, in coordinate cartesiane le componenti covarianti coincidono colle contravarianti [N. 39, (10)] e le citate relazioni (3) e (5) vengono a coincidere colle (9) che sono relazioni che legano le componenti cartesiane di uno stesso tensore doppio, qualunque esso sia, riferito a due differenti terne.

Ciò premesso siamo indotti a ritenere che (3), (5) e (11) *continuino a valere per qualunque tensore doppio.* Le (3) e (5) servono dunque a definire le componenti covarianti e le componenti contravarianti di un tensore doppio qualsiasi e le (11) esprimono il legame tra le due differenti specie di componenti, le quali si confondono in una sola soltanto quando si tratta di coordinate cartesiane.

Le cose dette per tensori doppi si possono facilmente estendere a tensori m[pli] qualunque.

Sieno $Y_{k_1 \ldots k_m} = Y^{k_1 \ldots k_m}$ le componenti cartesiane di un tensore m[plo] $\boldsymbol{T}$ [N. 7]; se x_k sono coordinate generali, si chiamano con riferimento a queste, *componenti covarianti* del tensore $\boldsymbol{T}$ le 3^m funzioni di x_k seguenti:

$$\text{(1)} \qquad X_{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_m} Y_{k_1 \ldots k_m} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}};$$

si chiamano *componenti contravarianti* dello stesso tensore $\boldsymbol{T}$ le 3^m funzioni di x_k:

$$\text{(2)} \qquad X^{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_m} Y^{k_1 \ldots k_m} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{k_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{k_m}}.$$

Se $\boldsymbol{T}$ è il prodotto tensoriale di m vettori [N. 5] $\underset{1}{\boldsymbol{V}} \ldots \underset{m}{\boldsymbol{V}}$, chiamando $\underset{1}{Y}_{k_1}$ le componenti cartesiane di $\underset{1}{\boldsymbol{V}}, \ldots$; $\underset{m}{Y}_{k_m}$ le componenti cartesiane di $\underset{m}{\boldsymbol{V}}$, risultano [N. 5, (1)]

$$(\cdot) \qquad Y_{k_1 \ldots k_m} = \underset{1}{Y}_{k_1} \ldots \underset{m}{Y}_{k_m}$$

le componenti cartesiane di $\boldsymbol{T}$. Introducendo le componenti covarianti $\underset{1}{X}_{i_1}, \ldots, \underset{m}{X}_{i_m}$ dei vettori $\underset{1}{\boldsymbol{V}}, \ldots, \underset{m}{\boldsymbol{V}}$, si hanno le relazioni [N. 35, (1)]:

$$\underset{1}{X}_{i_1} = \sum_1^3{}_{k_1} \underset{1}{Y}_{k_1} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}}, \ \ldots, \ \underset{m}{X}_{i_m} = \sum_1^3{}_{k_m} \underset{m}{Y}_{k_m} \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}};$$

moltiplicando membro a membro, dopo di aver posto:

$$(\cdot\cdot) \qquad X_{i_1 \ldots i_m} = \underset{1}{X}_{i_1} \ldots \underset{m}{X}_{i_m},$$

e tenuto conto di $(\cdot)$ si ottiene senz'altro (1).

Se si introducono le componenti contravarianti $\underset{1}{X}^{i_1}$ del vettore $\underset{1}{\boldsymbol{V}}, \ldots, \underset{m}{X}^{i_m}$ del vettore $\underset{m}{\boldsymbol{V}}$ si hanno le relazioni [N. 37, (1)]

$$\underset{1}{X}^{i_1} = \sum_1^3{}_{k_1} \underset{1}{Y}^{k_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{k_1}}, \ \ldots, \ \underset{m}{X}^{i_m} = \sum_1^3{}_{k_m} \underset{m}{Y}^{k_m} \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{k_m}};$$

si moltiplichino membro a membro, dopo di aver posto:

$$(:) \qquad X^{i_1 \ldots i_m} = \underset{1}{X}^{i_1} \ldots \underset{m}{X}^{i_m},$$

e tenendo conto, che è $\underset{1}{Y}^{k_1} = \underset{1}{Y}_{k_1}, \ldots, \underset{m}{Y}^{k_m} = \underset{m}{Y}_{k_m}$, e per (·)

$$Y^{k_1 \ldots k_m} = Y_{k_1 \ldots k_m} = \underset{1}{Y}^{k_1} \ldots \underset{m}{Y}^{k_m},$$

si ottiene (2).

Si osservi, come già per $m = 2$, che (1) e (2), dedotte considerando $\boldsymbol{T}$ come prodotto tensoriale di m vettori, non conservano traccie di componenti di questi vettori e quindi resta giustificato il loro impiego a tensori m[pli] qualunque.

Se le x_k sono coordinate cartesiane, avendosi [N. 1]

$$\frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} = \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{k_1}} = \alpha_{k_1 i_1}, \ \ldots \ \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}} = \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{k_m}} = \alpha_{k_m i_m},$$

le (1) e (2) vengono a coincidere colla seguente:

$$X_{i_1 \ldots i_m} = X^{i_1 \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_m} Y_{k_1 \ldots k_m} \alpha_{k_1 i_1} \cdots \alpha_{k_m i_m},$$

che non è altro che la (3′) del N. 5; cioè le $X_{i_1 \ldots i_m} = X^{i_1 \ldots i_m}$ sono le componenti rispetto alla terna, ora cartesiana, (x_k) del tensore $\boldsymbol{T}$, le cui componenti rispetto alla terna (y_i) sono

$$Y_{k_1 \ldots k_m} = Y^{k_1 \ldots k_m}. \tag{3}$$

È norma costante di rappresentare le componenti covarianti di un tensore, cogli indici in basso a destra e le componenti contravarianti cogli indici in alto a destra; solamente nel caso di componenti cartesiane è indifferente adoperare l'una oppure l'altra collocazione, come mostra (3).

Le relazioni (1) e (2) si possono risolvere rispetto alle componenti cartesiane di $\boldsymbol{T}$; si ottiene:

$$\left\{\begin{aligned} Y_{k_1 \ldots k_m} &= \sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_m} X_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{k_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{k_m}}, \\ Y^{k_1 \ldots k_m} &= \sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_m} X^{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Per dimostrare la prima di queste, si moltiplichi (1) per $\frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{p_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{p_m}}$ e si sommi rispetto a $i_1 \ldots i_m$; si ottiene:

$$\sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_m} X_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{p_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{p_m}} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_m} Y_{k_1 \ldots k_m} \sum_1^3{}_{i_1} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{p_1}} \cdots$$

$$\cdots \sum_1^3{}_{i_m} \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}} \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{p_m}} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_m} Y_{k_1 \ldots k_m} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial y_{p_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial y_{p_m}} = Y_{p_1 \ldots p_m}.$$

In modo analogo si dimostra la seconda di (4), moltiplicando (2), per $\frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}}$ e sommando rispetto a $i_1 \ldots i_m$.

Eliminando tra le (4) le componenti cartesiane per mezzo di (3) si ottengono le relazioni seguenti:

$$(5) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m} X_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{k_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{k_m}} = \sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m} X^{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}},$$

che legano tra loro le componenti covarianti e le componenti contravarianti dello stesso tensore $\boldsymbol{T}$.

Da (5) si ricavano le seguenti relazioni:

$$(6) \qquad \begin{cases} X_{i_1 \ldots i_m} = \sum_{1}^{3}{}_{k_1 \ldots k_m} a_{i_1 k_1} \ldots a_{i_m k_m} X^{k_1 \ldots k_m}, \\ X^{k_1 \ldots k_m} = \sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m} a^{i_1 k_1} \ldots a^{i_m k_m} X_{i_1 \ldots i_m}. \end{cases}$$

Per dedurre la prima di queste si moltiplichi (5) per $\frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{p_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{p_m}}$ e si sommi rispetto a $k_1 \ldots k_m$; si ottiene:

$$\sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m} X_{i_1 \ldots i_m} \sum_{1}^{3}{}_{k_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{p_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{p_1}} \cdots \sum_{1}^{3}{}_{k_m} \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{k_m}} \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{p_m}} =$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m} X^{i_1 \ldots i_m} \sum_{1}^{3}{}_{k_1} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{p_1}} \cdots \sum_{1}^{3}{}_{k_m} \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}} \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{p_m}};$$

ma è

$$\sum_{1}^{3}{}_{k_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{k_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{p_1}} = \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{p_1}} = \delta_{i_1 p_1}, \quad \ldots, \quad \sum_{1}^{3}{}_{k_m} \frac{\partial x_{i_m}}{\partial y_{k_m}} \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{p_m}} = \delta_{i_m p_m}$$

per cui, tenendo presente (1) del N. 33, si ottiene

$$X_{p_1 \ldots p_m} = \sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m} a_{i_1 p_1} \cdots a_{i_m p_m} X^{i_1 \ldots i_m},$$

che è appunto la prima di (6).

In modo analogo si dimostra la seconda di (6). Basta moltiplicare (5) per $\frac{\partial x_{p_1}}{\partial y_{k_1}} \cdots \frac{\partial x_{p_m}}{\partial y_{k_m}}$, indi sommare rispetto a $k_1 \ldots k_m$, tenendo presente (3) del N. 33.

Si rilevi ancor qui [N. 39] che se, in particolare, x_k sono coordinate cartesiane si ha [N. 33]:

$$a_{ik} = a^{ik} = \delta_{ik},$$

e allora (6) si riducono a

$$X_{i_1 \ldots i_m} = X^{i_1 \ldots i_m},$$

cioè le componenti covarianti del tensore T coincidono colle componenti contravarianti.

41. - **Componenti, covarianti e contravarianti, del tensore E.** — Indichiamo ora con ε^{*}_{ijk} le componenti cartesiane del tensore E [N. 9]; le sue componenti covarianti sono:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 0, \text{ se gli indici } i, j, k \text{ non sono tutti distinti}, \\ \varepsilon_{ijk} = (-1)^c \sqrt{a}, \text{ essendo } c \text{ la classe della sostituzione } \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Basta applicare al tensore E la (1) del N. 40; si ottiene:

$$\varepsilon_{ijk} = \sum_{1}^{3}{}_{pqr}\, \varepsilon^{*}_{pqr} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \frac{\partial y_r}{\partial x_k};$$

da questa, tenendo presente che a ε^{*}_{pqr} sono applicabili le (1) del N. 9, si deduce:

$$(\cdot) \qquad \varepsilon_{ijk} = S_{pqr}\, (-1)^{\gamma} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \frac{\partial y_r}{\partial x_k},$$

rappresentando S_{pqr} la sommatoria estesa a tutte le $3! = 6$ permutazioni degli indici p, q, r e γ essendo la classe della sostituzione $\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Si consideri ora il determinante funzionale [N. 33, (2)]

$$D = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right\| = \sqrt{a}$$

e si rilevi: 1° se i, j, k sono distinti, il secondo membro di $(\cdot)$ non è altro [An. Mat. N. 15] che $(-1)^c \sqrt{a}$; 2° se i, j, k non sono tutti distinti, il secondo membro è lo sviluppo di un determinante in cui almeno due linee parallele sono eguali e quindi [An. Mat. N. 17, 7°] nullo; dunque le (1), c. v. d.

Per le componenti contravarianti di E si ha:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varepsilon^{ijk} = 0, \text{ se gli indici non sono tutti distinti,} \\ \varepsilon^{ijk} = \dfrac{(-1)^c}{\sqrt{a}}, \text{ se } c \text{ è la classe della sostituzione } \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Si può seguire un procedimento analogo a quello fatto per dimostrare (1), applicando al tensore E la (2) del N. 40. Preferiamo, anche a titolo di esercitazione, dedurre le componenti contravarianti di ε dalle covarianti (1) applicando la seconda di (6) del N. 40.

Si ottiene:

$$\varepsilon^{ijk} = \Sigma_{pqr\,1}^{3}\; a^{ip}\, a^{jq}\, a^{kr}\, \varepsilon_{pqr};$$

per (1), chiamando ancora γ la classe della sostituzione $\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, si ha:

$$\varepsilon^{ijk} = \sqrt{a}\, S_{pqr}\, (-1)^{\gamma}\, a^{ip}\, a^{jq}\, a^{kr}.$$

Ora è [An. Mat. N.i 15; 16 e 17, 7°] e tenendo presente [N. 33] che $\| a^{ik} \| = \dfrac{1}{a}$,

$$S_{pqr} = \begin{cases} 0 - \text{ se } i, j, k \text{ non sono tutti distinti,} \\ (-1)^c \, \| a^{ik} \| = \dfrac{(-1)^c}{a}, \end{cases}$$

perciò sostituendo nella precedente, si deduce (2), c. v. d.

42. - **Somma e prodotto di tensori in coordinate generali.** — Sieno $\underset{1}{Y}_{i_1 \ldots i_m}$ e $\underset{2}{Y}_{i_1 \ldots i_m}$ le componenti cartesiane di due tensori m$^{\text{pli}}$ $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$ e $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$, si è definito somma dei due tensori [N. 10] il tensore m$^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{T}$ le cui componenti cartesiane sono:

$$(1)\qquad Y_{i_1 \ldots i_m} = \underset{1}{Y}_{i_1 \ldots i_m} + \underset{2}{Y}_{i_1 \ldots i_m}.$$

Se, riferendoci a coordinate generali x_k, si introducono le componenti covarianti di $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$, $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$ e $\boldsymbol{T}$:

$$\underset{1}{X}_{i_1 \ldots i_m}, \quad \underset{2}{X}_{i_1 \ldots i_m}, \quad X_{i_1 \ldots i_m},$$

si ha:

$$(2)\qquad X_{i_1 \ldots i_m} = \underset{1}{X}_{i_1 \ldots i_m} + \underset{2}{X}_{i_1 \ldots i_m}.$$

Infatti, applicando (1) del N. 40, si ha:

$$\underset{1}{X}_{i_1 \dots i_m} = \sum_{1}^{3}{}_{k_1 \dots k_m} \underset{1}{Y}_{k_1 \dots k_m} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}},$$

$$\underset{2}{X}_{i_1 \dots i_m} = \sum_{1}^{3}{}_{k_1 \dots k_m} \underset{2}{Y}_{k_1 \dots k_m} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}};$$

sommando membro a membro, tenendo presente (1), si ottiene:

$$\underset{1}{X}_{i_1 \dots i_m} + \underset{2}{X}_{i_1 \dots i} = \sum_{1}^{3}{}_{k_1 \dots k_m} \underset{1}{Y}_{k_1 \dots k_m} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{k_m}}{\partial x_{i_m}},$$

la quale, per la citata (1) del N. 40, mostra che $\underset{1}{X}_{i_1 \dots i_m} + \underset{2}{X}_{i_1 \dots i_m}$ sono le componenti covarianti del tensore somma $\boldsymbol{T}$, c. v. d.

Se si introducono le componenti contravarianti

$$\underset{1}{X}^{i_1 \dots i_m}, \quad \underset{2}{X}^{i_1 \dots i_m}, \quad X^{i_1 \dots i_m}.$$

dei tensori $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$, $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$ e $\boldsymbol{T}$ si ha:

$$X^{i_1 \dots i_m} = \underset{1}{X}^{i_1 \dots i_m} + \underset{2}{X}^{i_1 \dots i_m}. \tag{3}$$

La constatazione si fa in modo analogo al precedente per dimostrare (2), applicando (2) del N. 40.

Dunque *le componenti covarianti (o contravarianti) del tensore somma sono le somme delle componenti covarianti (o contravarianti) corrispondenti dei tensori addendi.*

Sieno ora $\underset{1}{Y}_{i_1 \dots i_p}$ le componenti cartesiane di un tensore p^{plo} $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$ e $\underset{2}{Y}_{k_1 \dots k_q}$ quelle di un secondo tensore q^{plo} $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$; tensore prodotto dei due nell'ordine indicato si è definito [N. 11] un terzo tensore $(p+q)^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{T}$ le cui componenti cartesiane sono:

$$Y_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q} = \underset{1}{Y}_{i_1 \dots i_p} \cdot \underset{2}{Y}_{k_1 \dots k_q}. \tag{4}$$

Riferiamoci a coordinate generali e indichiamo con

$$\underset{1}{X}_{i_1 \dots i_p}, \quad \underset{2}{X}_{k_1 \dots k_q}, \quad X_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q}$$

le componenti covarianti di $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$, $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$ e $\boldsymbol{T}$; si ha:

$$X_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q} = \underset{1}{X}_{i_1 \dots i_p} \cdot \underset{2}{X}_{k_1 \dots k_q}. \tag{5}$$

Infatti, per (1) del N. 40, si ricava:

$$\underset{1}{X}_{i_1 \dots i_p} = \sum_1^3{}_{j_1 \dots j_p} \underset{1}{Y}_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{j_p}}{\partial x_{i_p}},$$

$$\underset{2}{X}_{k_1 \dots k_q} = \sum_1^3{}_{h_1 \dots h_q} \underset{2}{Y}_{h_1 \dots h_q} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{k_1}} \cdots \frac{\partial y_{h_q}}{\partial x_{k_q}};$$

moltiplicando membro a membro, per la (4), si ottiene:

$$\underset{1}{X}_{i_1 \dots i_p} \cdot \underset{2}{X}_{k_1 \dots k_q} = \sum_1^3{}_{j_1 \dots j_p h_1 \dots h_q} Y_{j_1 \dots j_p h_1 \dots h_q} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{j_p}}{\partial x_{i_p}} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{k_1}} \cdots \frac{\partial y_{h_q}}{\partial x_{k_q}}.$$

Questa, per (1) del N. 40, esprime che $\underset{1}{X}_{i_1 \dots i_p} \cdot \underset{2}{X}_{k_1 \dots k_q}$ sono le componenti covarianti del tensore prodotto $\boldsymbol{T}$, c. v. d.

Se ci riferiamo alle componenti contravarianti dei tensori $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$, $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$ e $\boldsymbol{T}$:

$$\underset{1}{X}^{i_1 \dots i_p}, \quad \underset{2}{X}^{k_1 \dots k_p} \quad \text{e} \quad X^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q},$$

si ha:

$$X^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_q} = \underset{1}{X}^{i_1 \dots i_p} \cdot \underset{2}{X}^{k_1 \dots k_q}. \tag{6}$$

Lo si dimostra in modo analogo che per (5), applicando (2) del N. 40.

43. - Composizione dei tensori in coordinate generali. — Sieno $\underset{1}{Y}_{i_1 \dots i_\nu j_1 \dots j_p}$ le componenti cartesiane di un tensore $(\nu + p)^{\text{plo}}$ $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$ e $\underset{2}{Y}_{i_1 \dots i_\nu h_1 \dots h_q}$ quelle di un secondo tensore $(\nu + q)^{\text{plo}}$ $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$; colle posizioni:

$$Y_{j_1 \dots j_p h_1 \dots h_q} = \sum_1^3{}_{i_1 \dots i_\nu} \underset{1}{Y}_{i_1 \dots i_\nu j_1 \dots j_p} \cdot \underset{2}{Y}_{i_1 \dots i_\nu h_1 \dots h_q} \tag{1}$$

rimangono definite le componenti cartesiane di un tensore $(p + q)^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{T}$ che si è definito [N. 13] composto dei due tensori $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$ e $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$ mediante saturazione degli indici $i_1 \dots i_\nu$.

Riferendoci a coordinate generali introduciamo [N. 40] le componenti covarianti dei tensori $\underset{1}{\boldsymbol{T}}$, $\underset{2}{\boldsymbol{T}}$ e $\boldsymbol{T}$:

$$\underset{1}{X}_{k_1 \dots k_\nu l_1 \dots l_p}, \quad \underset{2}{X}_{k_1 \dots k_\nu m_1 \dots m_q}, \quad X_{l_1 \dots l_p m_1 \dots m_q}.$$

Si hanno le seguenti espressioni per le componenti del tensore $\boldsymbol{T}$:

$$(2)\qquad X_{l_1\ldots l_p m_1\ldots m_q} = \sum_1^3{}_{k_1\ldots k_\nu h_1\ldots h_\nu} a^{k_1h_1}\ldots a^{k_\nu h_\nu}\cdot$$
$$\cdot \underset{1}{X}_{k_1\ldots k_\nu l_1\ldots l_p}\cdot \underset{2}{X}_{h_1\ldots h_\nu m_1\ldots m_q}.$$

Infatti, applicando (1) del N. 40 si ha:

$$X_{l_1\ldots l_p m_1\ldots m_q} = \sum_1^3{}_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q} Y_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_1}}\cdots\frac{\partial y_{j_p}}{\partial x_{l_p}}\frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{m_1}}\cdots\frac{\partial y_{h_q}}{\partial x_{m_q}},$$

sostituendo nel secondo membro a $Y_{j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q}$ la (1) si ha:

$$X_{l_1\ldots l_p m_1\ldots m_q} = \sum_1^3{}_{i_1\ldots i_\nu j_1\ldots j_p h_1\ldots h_q} \underset{1}{Y}_{i_1\ldots i_\nu j_1\ldots j_p}\cdot$$
$$\cdot \underset{2}{Y}_{i_1\ldots i_\nu h_1\ldots h_q}\cdot\frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_1}}\cdots\frac{\partial y_{j_p}}{\partial x_{l_p}}\frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{m_1}}\cdots\frac{\partial y_{h_q}}{\partial x_{m_q}}.$$

Ma è [N. 40, (4)]

$$\underset{1}{Y}_{i_1\ldots i_\nu j_1\ldots j_p} = \sum_1^3{}_{r_1\ldots r_\nu s_1\ldots s_p} \underset{1}{X}_{r_1\ldots r_\nu s_1\ldots s_p}\frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{i_1}}\cdots\frac{\partial x_{r_\nu}}{\partial y_{i_\nu}}\frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{s_p}}{\partial y_{j_p}},$$

$$\underset{2}{Y}_{i_1\ldots i_\nu h_1\ldots h_q} = \sum_1^3{}_{t_1\ldots t_\nu u_1\ldots u_q} \underset{2}{X}_{t_1\ldots t_\nu u_1\ldots u_q}\frac{\partial x_{t_1}}{\partial y_{i_1}}\cdots\frac{\partial x_{t_\nu}}{\partial y_{i_\nu}}\frac{\partial x_{u_1}}{\partial y_{h_1}}\cdots\frac{\partial x_{u_q}}{\partial y_{h_q}},$$

per cui, sostituendo e ordinando opportunamente le sommatorie si ottiene:

$$X_{l_1\ldots l_p m_1\ldots m_q} = \sum_1^3{}_{\substack{r_1\ldots r_\nu s_1\ldots s_p\\ t_1\ldots t_\nu u_1\ldots u_q}} \underset{1}{X}_{r_1\ldots r_\nu s_1\ldots s_p}\cdot \underset{2}{X}_{t_1\ldots t_\nu u_1\ldots u_q}\cdot$$
$$\cdot\sum_1^3{}_{j_1}\frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{j_1}}\cdot\frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_1}}\cdots\sum_1^3{}_{j_p}\frac{\partial x_{s_p}}{\partial y_{j_p}}\frac{\partial y_{j_p}}{\partial x_{l_p}}\cdot\sum_1^3{}_{h_1}\frac{\partial x_{u_1}}{\partial y_{h_1}}\frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{m_1}}\cdots\sum_1^3{}_{h_q}\frac{\partial x_{u_q}}{\partial y_{h_q}}\frac{\partial y_{h_q}}{\partial x_{m_q}}\cdot$$
$$\cdot\sum_1^3{}_{i_1}\frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{i_1}}\frac{\partial x_{t_1}}{\partial y_{i_1}}\cdots\sum_1^3{}_{i_\nu}\frac{\partial x_{r_\nu}}{\partial y_{i_\nu}}\frac{\partial x_{t_\nu}}{\partial y_{i_\nu}};$$

ma è

$$\sum_1^3{}_{j_1}\frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{j_1}}\frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{l_1}} = \delta_{s_1 l_1},\ \ldots\ldots\ \sum_1^3{}_{h_1}\frac{\partial x_{u_1}}{\partial y_{h_1}}\frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{m_1}} = \delta_{u_1 m_1},\ \ldots.$$

per cui, tenendo presente (3) del N. 33, si ottiene:

$$X_{l_1\ldots l_q m_1\ldots m_q} = \sum_1^3{}_{r_1\ldots r_\nu t_1\ldots t_\nu} a^{r_1t_1}\ldots a^{r_\nu t_\nu} X_{r_1\ldots r_\nu l_1\ldots l_p}\cdot X_{t_1\ldots t_\nu m_1\ldots m_q},$$

c. v. d.

Se si introducono le componenti contravarianti dei tensori $\underset{1}{T}$, $\underset{2}{T}$, T:

$$\underset{1}{X}^{k_1 \ldots k_\nu l_1 \ldots l_p}, \quad \underset{2}{X}^{k_1 \ldots k_\nu m_1 \ldots m_p}, \quad X^{l_1 \ldots l_p m_1 \ldots m_q},$$

si hanno le seguenti espressioni per le componenti contravarianti di T:

$$(3) \quad X^{l_1 \ldots l_p m_1 \ldots m_q} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_\nu h_1 \ldots h_\nu} a_{k_1 h_1} \cdots a_{k_\nu h_\nu} \underset{1}{X}^{k_1 \ldots k_\nu l_1 \ldots l_p} \underset{2}{X}^{h_1 \ldots h_\nu m_1 \ldots m_q}.$$

La dimostrazione formale di queste relazioni si può fare sulle traccie di quella già indicata per (2), applicando (2) del N. 40 e tenendo presente (1) del N. 33.

Nel caso particolare in cui x_k sono coordinate cartesiane, avendosi [N. 33] $a_{ik} = a^{ik} = \delta_{ik}$ la (2) e la (3) vanno entrambe a coincidere con (1).

Se x_k non sono coordinate cartesiane, ma generali, (2) definiscono le componenti covarianti e (3) quelle contravarianti del tensore composto T mediante le corrispondenti componenti covarianti e contravarianti dei tensori componenti $\underset{1}{T}$ e $\underset{2}{T}$.

44. - **Componenti miste di un tensore.** — Sieno $X_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q}$ le componenti covarianti di un tensore $(p+q)^{\text{plo}}$ T e si consideri la potenza q^{ma} del tensore fondamentale Δ [N. 12], è un tensore $(2q)^{\text{plo}}$ le cui componenti contravarianti sono [N. 41 e 33]

$$a^{j_1 k_1} \cdots a^{j_q k_q}.$$

Poniamo

$$(1) \quad X_{i_1 \ldots i_p}^{-\cdots - j_1 \ldots j_q} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_q} a^{j_1 k_1} \cdots a^{j_q k_q} X_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_q}.$$

Se x_k sono coordinate cartesiane, avendosi [N. 33] $a^{ik} = \delta_{ik}$, da (1) scendono

$$X_{i_1 \ldots i_p}^{-\cdots - j_1 \ldots j_q} = X_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q},$$

e siccome in tal caso i secondi membri sono le componenti cartesiane del tensore T, così lo stesso significato hanno i primi membri.

Dunque $X_{i_1 \ldots i_p}^{- \ldots - j_1 \ldots j_q}$, che in coordinate cartesiane sono componenti di $\boldsymbol{T}$, in coordinate generali si chiamano *componenti miste* del tensore $\boldsymbol{T}$ e precisamente covarianti rispetto agli indici in basso e contravarianti rispetto agl' indici in alto.

Se del tensore $\boldsymbol{T}$ si considerano le componenti contravarianti $X^{i_1 \ldots i_p\, k_1 \ldots k_q}$, conviene allora prendere le componenti covarianti

$$a_{j_1 k_1} \cdots a_{j_q k_q}$$

della potenza q$^{\text{ma}}$ del tensore fondamentale Δ [N.$^{\text{i}}$ 12, 33 e 42] e comporre i due tensori mediante saturazione degli indici $k_1 \ldots k_q$; si ottengono le componenti miste di $\boldsymbol{T}$

$$X^{i_1 \ldots i_p}_{- \ldots - j_1 \ldots j_p} = \sum_1^3{}_{k_1 \ldots k_q}\, a_{j_1 k_1} \cdots a_{j_q k_q}\, X^{i_1 \ldots i_p\, k_1 \ldots k_q}, \tag{2}$$

contravarianti rispetto a $i_1 \ldots i_p$ e covarianti rispetto a $j_1 \ldots j_q$.

Va rilevato che per ottenere delle componenti miste del tensore $\boldsymbol{T}$ basta comporre mediante le componenti covarianti di $\boldsymbol{T}$ e le contravarianti di potenze di Δ che abbiano un qualsivoglia numero di indici comuni, anche non consecutivi, e sommare rispetto agli indici comuni. Conviene nell' indicazione lasciare, in alto, in bianco il posto degli indici che in basso non vengono sostituiti degli indici in alto di contravarianza. Analogamente dicasi se la composizione avviene per mezzo di componenti contravarianti di $\boldsymbol{T}$ e le covarianti di qualunque potenza di Δ.

Esempio. - Le componenti miste di un tensore doppio $\boldsymbol{T}$ sono:

$$X_i^{-j} = \sum_1^3{}_h\, a^{jk} X_{ik}, \tag{3}$$

e

$$X^j_{-i} = \sum_1^3{}_k\, a^{jk} X_{ki}. \tag{4}$$

Oppure

$$X^i_{-j} = \sum_1^3{}_k\, a_{jk} X^{ik},$$

e

$$X_j^{-i} = \sum_1^3{}_k\, a_{jk} X^{ki}.$$

Se il tensore $\boldsymbol{T}$ è simmetrico, essendo [N. 7] $X_{ik} = X_{ki}$ è pure $X_i^{-j} = X^j_{-i}$; se è emisimmetrico avendosi $X_{ik} + X_{ki} = 0$ è pure $X_i^{-j} + X^j_{-i} = 0$.

Nel caso particolare del tensore fondamentale $T = \Delta$ si ha [N.ⁱ 8 e 33]:

$$\delta_i^{-j} = \delta_{-i}^{j} = \sum_k^{3} a^{jk} a_{ik} = \delta_{ij},$$

dunque *le componenti miste del tensore fondamentale* Δ *coincidono colle componenti cartesiane.*

45. - **Derivazione dei vettori.** — Sieno Y_i le componenti cartesiane di un vettore, o tensore semplice $\boldsymbol{V}$; si è definito [N. 16] tensore derivato di $\boldsymbol{V}$ il tensore doppio $\boldsymbol{V}'$ le cui componenti cartesiane sono

$$Y_{i|k} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k}. \tag{1}$$

Immaginiamo ora di riferire il vettore $\boldsymbol{V}$ a coordinate generali x_k e sieno X_k le sue componenti covarianti.

Ci proponiamo di determinare le componenti covarianti del tensore derivato $\boldsymbol{V}'$.

Esse sono definite nel modo seguente:

$$X_{i|k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_j^{3} \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ j \end{matrix} \right\} X_j, \tag{2}$$

essendo

$$\left\{ \begin{matrix} i\ k \\ j \end{matrix} \right\} = -\sum_{lm}^{3} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_l \partial y_m} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_k}. \tag{3}$$

Infatti, applicando la prima di (3) del N. 39, si ha, per (1):

$$X_{i|k} = \sum_{jh}^{3} Y_{j|h} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} = \sum_{jh}^{3} \frac{\partial Y_j}{\partial y_h} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k}; \tag{$\cdot$}$$

ma, per la seconda di (1) del N. 35,

$$Y_j = \sum_l^{3} X_l \frac{\partial x_l}{\partial y_j}$$

e, derivando,

$$\frac{\partial Y_j}{\partial y_h} = \sum_l^{3} \frac{\partial X_l}{\partial y_h} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} + \sum_l^{3} X_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_j \partial y_h};$$

d'altra parte, considerando X_l dipendente da y_h per mezzo delle x_m, si ha:

$$\frac{\partial X_l}{\partial y_h} = \sum_m^{3} \frac{\partial X_l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_h},$$

per cui, sostituendo nella precedente,

$$\frac{\partial Y_j}{\partial y_h} = \sum_1^3{}_{lm} \frac{\partial X_l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_h} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} + \sum_1^3{}_l X_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_j \partial y_h};$$

portiamo infine questa in (·); si ottiene:

$$X_{i|k} = \sum_1^3{}_{jhlm} \frac{\partial X_l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_h} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} + \sum_1^3{}_{jhl} X_l \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_j \partial y_h} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_1^3{}_{lm} \frac{\partial X_l}{\partial x_m} \sum_1^3{}_j \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \sum_1^3{}_h \frac{\partial x_m}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} + \sum_1^3{}_l X_l \sum_1^3{}_{jh} \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_j \partial y_h} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k};$$

ma per essere:

$$\sum_1^3{}_j \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \delta_{li}, \qquad \sum_1^3{}_h \frac{\partial x_m}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} = \delta_{mk},$$

e tenendo presente (3), si ottiene in definitiva:

$$X_{i|k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_1^3{}_l \begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} X_l, \qquad \text{c. v. d.}$$

I simboli (3), manifestamente simmetrici rispetto alla coppia di indici in alto,

$$\begin{Bmatrix} i & k \\ & j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k & i \\ & j \end{Bmatrix}$$

sono noti col nome di ***simboli di Christoffel di 2ª specie.*** Essi sono nulli se x_k sono coordinate cartesiane, perchè in tal caso le relazioni tra y_i e x_k sono lineari [N. 1] e in conseguenza sono nulle tutte le derivate seconde. Si ritrovano allora in (2) le espressioni cartesiane delle componenti del tensore derivato del vettore $\boldsymbol{V}$ [N. 16].

Si può attribuire ai detti simboli di CHRISTOFFEL anche la forma seguente:

$$(3') \qquad \begin{Bmatrix} i & k \\ & j \end{Bmatrix} = \sum_1^3{}_l \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_l}.$$

Infatti, dalle identità:

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_m} = \delta_{lm},$$

derivando rispetto a x_k si ottiene:

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_m} + \sum_1^3{}_i \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_m}\right) = 0,$$

e per essere

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_m}\right) = \sum_1^3{}_h \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_m \partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_k},$$

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_m} = -\sum_1^3{}_{ih} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_m \partial y_h} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k};$$

moltiplicando per $\frac{\partial y_m}{\partial x_j}$ e sommando rispetto a m, si ottiene

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_k} \sum_1^3{}_m \frac{\partial x_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} = -\sum_1^3{}_{ihm} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_m \partial y_h} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$

cioè per essere

$$\sum_1^3{}_m \frac{\partial x_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \delta_{ij},$$

$$\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_j \partial x_k} = -\sum_1^3{}_{ihm} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_m \partial y_h} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \frac{\partial y_m}{\partial x_j};$$

infine, moltiplicando per $\frac{\partial x_r}{\partial y_l}$ e sommando rispetto a l e tenendo presente (3),

$$\sum_1^3{}_l \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial x_r}{\partial y_l} = -\sum_1^3{}_{ihm} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_m \partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \sum_1^3{}_l \frac{\partial x_r}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} =$$

$$= -\sum_1^3{}_{hm} \frac{\partial^2 x_r}{\partial y_m \partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial x_k} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \begin{Bmatrix} k & j \\ & r \end{Bmatrix}, \qquad \text{c. v. d.}$$

Si chiamano *simboli di Christoffel di prima specie* i seguenti:

$$\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \sum_1^3{}_j a_{jl} \begin{Bmatrix} i & k \\ & j \end{Bmatrix}; \tag{4}$$

i quali si possono esprimere anche nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \sum_1^3{}_m \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial y_m}{\partial x_l} = \begin{bmatrix} k & i \\ & l \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Infatti, per la (1) del N. 33 si ha:

$$a_{jl} = \sum_1^3{}_\mu \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_l},$$

mentre la (3') da

$$\begin{Bmatrix} i & k \\ & j \end{Bmatrix} = \sum_1^3{}_m \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_m};$$

per queste da (4) si ricava:

$$\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \sum_1^3{}_{jm\mu} \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_l} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_m}$$

$$= \sum_1^3{}_{m\mu} \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial y_\mu}{\partial x_l} \sum_1^3{}_j \frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_m}$$

$$= \sum_1^3{}_m \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial y_m}{\partial x_l},$$

c. v. d.

Da (5) si ricava la seguente formula notevole:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \begin{bmatrix} i & l \\ & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ & i \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Infatti, avendosi [(1) del N. 33]

$$a_{ik} = \sum_1^3{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k},$$

derivando si ottiene, tenendo presente (5),

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \sum_1^3{}_\nu \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} + \sum_1^3{}_\nu \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} i & l \\ & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ & i \end{bmatrix},$$ c. v. d.

Da (6) si ricava l'altra formula notevole:

$$\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \right). \tag{7}$$

Infatti, da (6) permutando circolarmente gli indici i, k, l si hanno oltre la (6) le altre due seguenti relazioni:

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} = \begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & k \\ & i \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial a_{lk}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} k & i \\ & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & i \\ & k \end{bmatrix};$$

sommando queste membro a membro e sottraendo la (6) si ottiene la (7),

c. v. d.

Da (4) si ricavano le seguenti relazioni, che definiscono i simboli di Christoffel di 2ª specie mediante quelli di 1ª specie:

$$\begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} = \sum_1^3{}_j a^{jl} \begin{bmatrix} i & k \\ & j \end{bmatrix}. \tag{4'}$$

Infatti, moltiplicando (4) per a^{lm} e sommando rispetto a l, si ottiene:

$$\sum_{1}^{3}{}_l\, a^{lm} \begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \sum_{1}^{3}{}_{jl}\, a_{jl}\, a^{lm} \begin{Bmatrix} i & k \\ & j \end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_j \begin{Bmatrix} i & k \\ & j \end{Bmatrix} \sum_{1}^{3}{}_l\, a_{jl}\, a^{lm} = \sum_{1}^{3}{}_j \begin{Bmatrix} i & k \\ & j \end{Bmatrix} \delta_{jm} = \begin{Bmatrix} i & k \\ & m \end{Bmatrix},$$

c. v. d.

Se si introducono le componenti contravarianti X^i del vettore V, si ottengono le seguenti espressioni per le componenti contravarianti del tensore derivato V':

$$(8) \qquad X^{i|k} = \sum_{1}^{3}{}_m\, a^{km} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_m} + \sum_{1}^{3}{}_l \begin{Bmatrix} l & m \\ & i \end{Bmatrix} X^l \right).$$

Infatti, applicando la prima di (5) del N. 39, si ha, tenendo presente [N. 39, (8)] che $Y_{j|h} = Y^{j|h}$, e la (1),

$$(\cdot) \qquad X^{i|k} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, Y^{j|h} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_k}{\partial y_h} = \sum_{1}^{3}{}_{jh} \frac{\partial Y^j}{\partial y_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_k}{\partial y_h},$$

ma, per la seconda di (1) del N. 37, si ha:

$$Y^j = \sum_{1}^{3}{}_l\, X^l \frac{\partial y_j}{\partial x_l}$$

e derivando rispetto a y_h,

$$\frac{\partial Y^j}{\partial y_h} = \sum_{1}^{3}{}_l \frac{\partial X^l}{\partial y_h} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} + \sum_{1}^{3}{}_l\, X^l \frac{\partial}{\partial y_h} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_l} \right);$$

d'altra parte, considerando X^l e $\frac{\partial y_j}{\partial x_l}$ dipendenti da y_h per mezzo delle x_m, si hanno le relazioni:

$$\frac{\partial X^l}{\partial y_h} = \sum_{1}^{3}{}_m \frac{\partial X^l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_h}, \qquad \frac{\partial}{\partial y_h} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_l} \right) = \sum_{1}^{3}{}_m \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l\, \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_h},$$

per cui, sostituendo nella precedente, si ha:

$$\frac{\partial Y^j}{\partial y_h} = \sum_{1}^{3}{}_{lm} \frac{\partial X^l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_h} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} + \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, X^l \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l\, \partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial y_h};$$

sostituiamo questa in $(\cdot)$, si ottiene:

$$X^{i|k} = \sum_{1}^{3}{}_{lm} \frac{\partial X^l}{\partial x_m} \sum_{1}^{3}{}_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} \sum_{1}^{3}{}_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \frac{\partial x_m}{\partial y_h} + \sum_{1}^{3}{}_{jlm}\, X^l \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l\, \partial x_m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \sum_{1}^{3}{}_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \frac{\partial x_m}{\partial y_h},$$

ma è [N. 33, (3)]:

$$\sum_1^3{}_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_l} = \delta_{il}, \qquad \sum_1^3{}_h \frac{\partial x_k}{\partial y_h}\frac{\partial x_m}{\partial y_h} = a^{km},$$

per cui si ottiene:

$$X^{i|k} = \sum_1^3{}_m a^{km} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_m} + \sum_1^3{}_l X^l \sum_1^3{}_j \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_l \partial x_m} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$$

da cui, per la (3'), si ottiene senz'altro (4), c. v. d.

Le formule (2) e (8) sono note rispettivamente colle denominazioni di *derivazione covariante* e *derivazione contravariante*.

È facile di constatare che tra le componenti covarianti (2) del tensore derivato V' e le componenti contravarianti (8) hanno luogo le consuete relazioni [(6) del N. 40] tra componenti covarianti e quelle contravarianti di uno stesso tensore doppio, cioè:

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} X_{i|k} &= \sum_1^3{}_{jh} a_{ij}\, a_{kh}\, X^{j|h}, \\ X^{i|k} &= \sum_1^3{}_{jh} a^{ij}\, a^{kh}\, X_{j|h}. \end{aligned}\right.$$

Infatti, si moltiplichi (2) per $a^{il}\, a^{km}$ e si sommi rispetto a i e k; si ottiene:

$$\sum_1^3{}_{ik} a^{il}\, a^{km}\, X_{i|k} = \sum_1^3{}_{ik} a^{il}\, a^{km} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_1^3{}_{ijk} a^{il}\, a^{km} \left\{\begin{matrix} i & k \\ & j \end{matrix}\right\} X_j;$$

ma è [N, 38, (2)]

$$X_i = \sum_1^3{}_r a_{ir}\, X^r,$$

da cui, derivando e tenendo presente (6), si ottiene successivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} &= \sum_1^3{}_r \frac{\partial a_{ir}}{\partial x_k} X^r + \sum_1^3{}_r a_{ir} \frac{\partial X^r}{\partial x_k} \\ &= \sum_1^3{}_r \left\{\begin{bmatrix} i & k \\ & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & k \\ & i \end{bmatrix}\right\} X^r + \sum_1^3{}_r a_{ir} \frac{\partial X^r}{\partial x_k}; \end{aligned}$$

sostituendo, e tenendo presente (4) e (4'), si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_1^3{}_{ik} a^{il}\, a^{km}\, X_{i|k} = \sum_1^3{}_{ikr} a^{il}\, a^{km} & \left\{\begin{bmatrix} i & k \\ & r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & k \\ & i \end{bmatrix}\right\} X^r + \\ & + \sum_1^3{}_{irk} a^{il}\, a^{km}\, a_{ir} \frac{\partial X^r}{\partial x_k} - \sum_1^3{}_{ij\,kr} a^{il}\, a^{km}\, a_{jr} \left\{\begin{matrix} i & k \\ & j \end{matrix}\right\} X^r \end{aligned}$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{ikr}\, a^{il}\, a^{km} \begin{bmatrix} r & k \\ & i \end{bmatrix} X^r + \sum_{1}^{3}{}_{rk}\, a^{km} \frac{\partial X^r}{\partial x_k} \sum_{1}^{3}{}_i\, a^{il}\, a_{ir}$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_k\, a^{km} \frac{\partial X^l}{\partial x_k} + \sum_{1}^{3}{}_{kr}\, a^{km}\, X^r \sum_{1}^{3}{}_i\, a^{il} \begin{bmatrix} r & k \\ & i \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_k\, a^{km} \left\{ \frac{\partial X^l}{\partial x_k} + \sum_{1}^{3}{}_r \begin{Bmatrix} r & k \\ & l \end{Bmatrix} \right\} X^r$$

$$= X^{l|m}$$

che è la seconda di (9), c. v. d.

La prima di (9), com'è noto [N. 39], consegue dalla seconda.

Le espressioni che definiscono le componenti miste del tensore doppio derivato V' si ottengono senz'altro applicando alla (2) le (3) e (4) del N. 44.

46. - **Derivazione dei tensori.** — Sieno ora Y_{ij} le componenti cartesiane di un tensore doppio T, si è definito [N. 17] tensore derivato di T il tensore triplo T' le cui componenti cartesiane sono:

$$(1) \qquad Y_{ij|k} = \frac{\partial Y_{ij}}{\partial y_k}.$$

Riferendoci a coordinate generali x_l sieno X_{lm} le componenti covarianti di T; estendendo le considerazioni del numero precedente vogliamo determinare le componenti covarianti del tensore derivato T'. Esse sono definite dalle relazioni seguenti:

$$(2) \qquad X_{ij|k} = \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} - \sum_{1}^{3}{}_l \begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} X_{lj} - \sum_{1}^{3}{}_l \begin{Bmatrix} j & k \\ & l \end{Bmatrix} X_{il}.$$

Infatti, applicando per $m = 3$ la (1) del N. 40, si ha:

$$(\cdot) \qquad X_{ij|k} = \sum_{1}^{3}{}_{pqr}\, Y_{pq|r} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} = \sum_{1}^{3}{}_{pqr} \frac{\partial Y_{pq}}{\partial y_r} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \frac{\partial y_r}{\partial x_k};$$

per la seconda di (3) del N. 39, si ha:

$$\frac{\partial Y_{pq}}{\partial y_r} = \sum_{1}^{3}{}_{\mu\nu} \frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial y_r} \frac{\partial x_\mu}{\partial y_p} \frac{\partial x_\nu}{\partial y_q} + \sum_{1}^{3}{}_{\mu\nu}\, X_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y_p \partial y_r} \frac{\partial x_\nu}{\partial y_q} + \sum_{1}^{3}{}_{\mu\nu}\, X_{\mu\nu} \frac{\partial x_\mu}{\partial y_p} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial y_q \partial y_r},$$

se si considera $X_{\mu\nu}$ dipendente da y_r per mezzo delle x_m, si ottiene:

$$\frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial y_r} = \sum_{1}^{3}{}_m \frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_r},$$

per cui, sostituendo nella precedente,

$$\frac{\partial X_{pq}}{\partial y_r}=\sum_1^3{}_{\mu\nu m}\frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial x_m}\frac{\partial x_\mu}{\partial y_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial y_q}\frac{\partial x_m}{\partial y_r}+\sum_1^3{}_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y_p\partial y_r}\frac{\partial x_\nu}{\partial y_q}+\sum_1^3{}_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial y_p}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial y_q\partial y_r};$$

sostituendo in (·) si ottiene:

$$X_{ij|k}=\sum_1^3{}_{\mu\nu m}\frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial x_m}\sum_1^3{}_p\frac{\partial x_\mu}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x_i}\sum_1^3{}_q\frac{\partial x_\nu}{\partial y_q}\frac{\partial y_q}{\partial x_j}\sum_1^3{}_r\frac{\partial x_m}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial x_k}+$$

$$+\sum_1^3{}_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\sum_1^3{}_{pr}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y_p\partial y_r}\frac{\partial y_p}{\partial x_i}\frac{\partial y_r}{\partial x_k}\sum_1^3{}_q\frac{\partial x_\nu}{\partial y_q}\cdot\frac{\partial y_q}{\partial x_j}+$$

$$+\sum_1^3{}_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\sum_1^3{}_{qr}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial y_q\partial y_r}\frac{\partial y_q}{\partial x_j}\frac{\partial y_r}{\partial x_k}\sum_1^3{}_p\frac{\partial x_\mu}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x_i};$$

infine, tenendo presente (3) del N. 45, si ricava successivamente:

$$X_{ij|k}=\sum_1^3{}_{\mu\nu m}\frac{\partial X_{\mu\nu}}{\partial x_m}\delta_{\mu i}\delta_{\nu j}\delta_{mk}-\sum_1^3{}_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}i & k\\ & \mu\end{matrix}\right\}\delta_{\nu j}-\sum_1^3{}_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}j & k\\ & \nu\end{matrix}\right\}\delta_{\mu i}$$

$$=\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k}-\sum_1^3{}_\mu X_{\mu j}\left\{\begin{matrix}i & k\\ & \mu\end{matrix}\right\}-\sum_1^3{}_\nu X_{i\nu}\left\{\begin{matrix}j & k\\ & \nu\end{matrix}\right\},\qquad\text{c. v. d.}$$

Sieno ora X^{ij} le componenti contravarianti del tensore doppio T, si hanno le seguenti espressioni per le componenti contravarianti del tensore triplo T', derivato di T,

$$(3)\qquad X^{ij|k}=\sum_1^3{}_m a^{km}\left(\frac{\partial X^{ij}}{\partial x_m}+\sum_1^3{}_l\left\{\begin{matrix}l & m\\ & i\end{matrix}\right\}X^{lj}+\sum_1^3{}_l\left\{\begin{matrix}l & m\\ & j\end{matrix}\right\}X^{il}\right).$$

Una deduzione diretta si può ottenere seguendo un procedimento analogo a quello fatto per dimostrare (8) del numero precedente. Applicando (2) del N. 40, si ha:

$$(\cdot)\qquad X^{ij|k}=\sum_1^3{}_{pqr}Y^{pq|r}\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial x_j}{\partial y_q}\frac{\partial x_k}{\partial y_r}=\sum_1^3{}_{pqr}\frac{\partial Y^{pq}}{\partial y_r}\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial x_j}{\partial y_q}\frac{\partial x_k}{\partial y_r};$$

ma, applicando la seconda di (5) del N. 39, è:

$$Y^{pq}=\sum_1^3{}_{\mu\nu}X^{\mu\nu}\frac{\partial y_p}{\partial x_\mu}\frac{\partial y_q}{\partial x_\nu};$$

che, derivata, dà

$$\frac{\partial Y^{pq}}{\partial y_r}=\sum_1^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu\nu}}{\partial y_r}\frac{\partial y_p}{\partial x_\mu}\frac{\partial y_q}{\partial x_\nu}+\sum_1^3{}_{\mu\nu}X^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_p}{\partial x_\mu}\right)\cdot\frac{\partial y_q}{\partial x_\nu}+\sum_1^3{}_{\mu\nu}X^{\mu\nu}\frac{\partial y_p}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_q}{\partial x_\nu}\right);$$

considerando $X^{\mu\nu}$, $\dfrac{\partial y_p}{\partial x_\mu}$ e $\dfrac{\partial y_q}{\partial x_\nu}$ dipendenti da y_r per mezzo delle x_m, si ha:

$$\frac{\partial X^{\mu\nu}}{\partial y_r} = \sum_1^3{}_m \frac{\partial X^{\mu\nu}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_r}, \quad \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_p}{\partial x_\mu}\right) = \sum_1^3{}_m \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_\mu \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_r},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_q}{\partial x_\nu}\right) = \sum_1^3{}_m \frac{\partial^2 y_q}{\partial x_\nu \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial y_r}$$

per cui, sostituendo nella precedente, si ottiene:

$$\frac{\partial Y^{pq}}{\partial y_r} = \sum_1^3{}_{\mu\nu m} \frac{\partial X^{\mu\nu}}{\partial x_m} \frac{\partial y_p}{\partial x_\mu} \frac{\partial y_q}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} + \sum_1^3{}_{\mu\nu m} X^{\mu\nu} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_\mu \partial x_m} \frac{\partial y_q}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} +$$

$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu m} X^{\mu\nu} \frac{\partial^2 y_q}{\partial x_\nu \partial x_m} \frac{\partial y_p}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_m}{\partial y_r};$$

sostituendo in (·) si ha:

$$X^{ij|k} = \sum_1^3{}_{\mu\nu m} \frac{\partial X^{\mu\nu}}{\partial x_m} \sum_1^3{}_p \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_\mu} \sum_1^3{}_q \frac{\partial x_j}{\partial y_q} \frac{\partial y_q}{\partial x_\nu} \sum_1^3{}_r \frac{\partial x_k}{\partial y_r} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} +$$

$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu m} X^{\mu\nu} \sum_1^3{}_q \frac{\partial x_j}{\partial y_q} \frac{\partial y_q}{\partial x_\nu} \sum_1^3{}_r \frac{\partial x_k}{\partial y_r} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} \sum_1^3{}_p \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_\mu \partial x_m} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} +$$

$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu m} X^{\mu\nu} \sum_1^3{}_p \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_\mu} \sum_1^3{}_r \frac{\partial x_k}{\partial y_r} \frac{\partial x_m}{\partial y_r} \sum_1^3{}_q \frac{\partial^2 y_q}{\partial x_\nu \partial x_m} \frac{\partial x_j}{\partial y_q},$$

e da questa, tenendo presente (3) del N. 33 e (3') del N. 45, si ricava successivamente:

$$X^{ij|k} = \sum_1^3{}_{\mu\nu m} \frac{\partial X^{\mu\nu}}{\partial x_m} \delta_{\mu i} \delta_{\nu j} a^{km} + \sum_1^3{}_{\mu\nu m} X^{\mu\nu} \delta_{\nu j} a^{km} \left\{ \begin{matrix} \mu & m \\ & i \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu m} X^{\mu\nu} \delta_{\mu i} a^{km} \left\{ \begin{matrix} \nu & m \\ & j \end{matrix} \right\}$$

$$= \sum_1^3{}_m \frac{\partial X^{ij}}{\partial x_m} a^{km} + \sum_1^3{}_{\mu m} X^{\mu j} a^{km} \left\{ \begin{matrix} \mu & m \\ & i \end{matrix} \right\} + \sum_1^3{}_{\nu m} X^{i\nu} a^{km} \left\{ \begin{matrix} \nu & m \\ & j \end{matrix} \right\}$$

$$= \sum_1^3{}_m a^{km} \left(\frac{\partial X^{ij}}{\partial x_m} + \sum_1^3{}_\mu \left\{ \begin{matrix} \mu & m \\ & i \end{matrix} \right\} X^{\mu j} + \sum_1^3{}_\nu \left\{ \begin{matrix} \nu & m \\ & j \end{matrix} \right\} X^{i\nu} \right),$$

c. v. d.

La (2) e la (3) sono denominate *formule di derivazione covariante* e, rispettivamente, *contravariante*, ma esse non sono che due rappresentazioni dello stesso tensore triplo T', derivato del tensore doppio T, valendo tra i due tipi di componenti le relazioni seguenti:

$$(4)\quad \begin{cases} X_{ij|k} = \sum_{pqr}^{3}{}_{1} a_{ip}\, a_{jq}\, a_{kr}\, X^{pq|r}, \\ X^{ij|k} = \sum_{pqr}^{3}{}_{1} a^{ip}\, a^{jq}\, a^{kr}\, X_{pq|r} \end{cases}$$

che sono [(6) N. 40] quelle che legano componenti covarianti e componenti contravarianti di uno stesso tensore triplo.

Le (4) si possono dimostrare seguendo un procedimento analogo a quello tenuto nel N. 45 per giustificare (9).

In quanto alle componenti miste basta riferirsi alle formule stabilite al N. 44.

Le considerazioni svolte relativamente al tensore derivato di un tensore doppio e i corrispondenti risultati si possono estendere, senza maggior difficoltà concettuale alla derivazione di tensori qualunque.

Sieno $X_{i_1\ldots i_m}$ le componenti covarianti di un tensore m$^{\text{plo}}$ T, le componenti covarianti del suo tensore derivato $(m+1)^{\text{plo}}$ T' sono definite nel modo seguente:

$$(5)\qquad X_{i_1\ldots i_m|k} = \frac{\partial X_{i_1\ldots i_m}}{\partial x_k} - \sum_{\mu}^{m}{}_{1} \sum_{l}^{3}{}_{1} \left\{ \begin{matrix} i_\mu\ k \\ l \end{matrix} \right\} X_{i_1\ldots i_{\mu-1}\, l\, i_{\mu+1}\ldots i_m};$$

quelle contravarianti dalle relazioni:

$$(6)\quad X^{i_1\ldots i_m|k} = \sum_{p}^{3}{}_{1} a^{kp} \left(\frac{\partial X^{i_1\ldots i_m}}{\partial x_p} + \sum_{\mu}^{m}{}_{1} \sum_{l}^{3}{}_{1} \left\{ \begin{matrix} l\ p \\ i_\mu \end{matrix} \right\} X^{i_1\ldots i_{\mu-1}\, l\, i_{\mu+1}\ldots i_m} \right);$$

per le componenti miste basta riferirsi alle formule stabilite al N. 44, quando si tengano presenti (5) e (6).

Si rammenti che se un tensore è costante il suo tensore derivato è nullo [N. 17], cioè sono nulle le sue componenti cartesiane [N. 7] e quindi [N$^{\text{i}}$. 40 e 44] le sue componenti covarianti, contravarianti e miste.

In particolare, sono costanti: il tensore fondamentale Δ [N. 8] e il tensore E [N. 9] per cui i rispettivi tensori derivati sono nulli e quindi sono nulle le rispettive componenti covarianti, contravarianti (teoremi di Ricci) e miste.

47. - **Divergenze e rotori.** — Si è visto [N. 18] che di un tensore m$^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{T}$ di componenti cartesiane $Y_{i_1 \ldots i_m}$ si hanno, in generale, m divergenze, ciascuna essendo un tensore $(m-1)^{\text{plo}}$ $\underset{k}{\boldsymbol{D}}$ le cui componenti cartesiane sono:

$$(1) \qquad Y_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_m} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial Y_{i_1 \ldots i_{k-1} j i_{k+1} \ldots i_m}}{\partial y_j} .$$

Facendo uno alla volta $k = 1, 2, \ldots, m$ si hanno le componenti cartesiane di ciascuno dei tensori $\underset{1}{\boldsymbol{D}}, \ldots, \underset{m}{\boldsymbol{D}}$.

In coordinate generali x_m, introducendo ad esempio le componenti covarianti $X_{i_1 \ldots i_m}$ del tensore $\boldsymbol{T}$, per il tensore divergenza $\underset{k}{\boldsymbol{D}}$ si hanno le seguenti componenti covarianti:

$$(2) \qquad X_{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_m} = \sum_1^3{}_j X_{i_1 \ldots i_{k-1} j i_{k+1}}{}^{|j} ,$$

e le seguenti componenti contravarianti:

$$(3) \qquad X^{i_1 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_m} = \sum_1^3{}_j X^{i_1 \ldots i_{k-1} j i_{k+1} \ldots i_m}{}_{|j} .$$

La giustificazione è immediata quando si osservi che quest'ultime si deducono da (1) col solito procedimento spiegato nei numeri precedenti, e che, se x_m sono cartesiane (2) e (3) coincidono con (1).

Abbiamo visto [N. 19] che il tensore $\boldsymbol{T}$ ammette anche m tensori m$^{\text{pli}}$ $\underset{h}{\boldsymbol{R}}$, $(h = 1, 2, \ldots, m)$ le cui componenti cartesiane sono:

$$(4) \qquad Y_{i_1 \ldots i_{h-1} i i_{h+1} \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial Y_{i_1 \ldots i_{h-1} k i_{h+1} \ldots i_m}}{\partial y_j} ;$$

tali tensori si sono definiti *rotori* del tensore $\boldsymbol{T}$.

In coordinate generali, si hanno le seguenti espressioni per le componenti covarianti del rotore $\underset{h}{\boldsymbol{R}}$:

$$(5) \qquad \underset{h}{R}_{i i_1 \ldots i_{h-1} i_{h+1} \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{jk} \varepsilon_{ijk} X_{i_1 \ldots i_{h-1} k i_{h+1} \ldots i_m}{}^{|j} ,$$

dove ε_{ijk} sono le componenti covarianti del tensore E, definite da (1) del N. 41. Le componenti contravarianti hanno invece le seguenti espressioni:

$$(6) \qquad \underset{h}{R}^{i i_1 \ldots i_{h-1} i_{h+1} \ldots i_m} = \sum_1^3{}_{jk} \varepsilon^{ijk} X^{i_1 \ldots i_{h-1} k i_{h+1} \ldots i_m}{}_{|j} ;$$

in queste ε^{ijk} sono le componenti contravarianti del tensore E, definite da (2) del N. 41. Se si sviluppano le sommatorie, tenendo presenti le citate espressioni di ε^{ijk}, si ottengono altresì le seguenti:

$$(6') \qquad \underset{h}{R}^{ii_1 \ldots i_{h-1} i_{h+1} \ldots i_m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \left(X^{i_1 \ldots i_{h-1}\, i+2\, i_{h+1} \ldots i_m}{}_{|i+1} - X^{i_1 \ldots i_{h-1}\, i+1\, i_{h+1} \ldots i_m}{}_{|i+2} \right).$$

Per la giustificazione di queste formule (5), (6) e (6′) si osservi che, in coordinate cartesiane esse coincidono con (4) e (4′) del N. 19. Esse si possono del resto dedurre direttamente dalle citate formule del N. 19 mediante il consueto passaggio dalle componenti cartesiane alle generali.

CAPITOLO VI.

Applicazioni. - Rappresentazione intrinseca dei tensori

48. - **Invarianti.** — Sieno v_i le componenti covarianti di un vettore $\boldsymbol{v}$ e w^i le componenti contravarianti di un secondo vettore $\boldsymbol{w}$; componendo [N.i 43 e 44] nel modo seguente:

$$(1) \qquad \sum_{1}^{3}{}_i\, v_i\, w^i$$

si ottiene un tensore di ordine zero [N. 7] che è *invariante*, cioè indipendente da qualsiasi riferimento. *Il significato che esso ha in coordinate cartesiane viene quindi mantenuto anche se ci si riferisce a coordinate generali.* È questo un principio molto utile, come si avrà occasione di constatare, e di portata molto più ampia del caso semplice ora considerato.

In coordinate cartesiane l'invariante (1) ha notoriamente il significato di prodotto scalare $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ dei due vettori [Mecc. raz. N. 18]; pel principio ora enunciato, in coordinate generali, (1) continuerà a definire il prodotto scalare dei vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$; manifestamente esso può rappresentarsi ancora nel seguente modo:

$$\sum_{1}^{3}{}_i\, v^i\, w_i .$$

In generale, sieno $T_{i_1 \ldots i_m}$ le componenti covarianti di un tensore m$^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{T}$ e $U^{i_1 \cdots i_m}$ quelle contravarianti di un secondo tensore m$^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{U}$; ponendo

$$I = \sum_{1}^{3}{}_{i_1 \ldots i_m}\, T_{i_1 \ldots i_m}\, U^{i_1 \cdots i_m} ,$$

si ha un invariante — *invariante quadratico* — che si può esprimere anche mediante le componenti contravarianti $T^{i_1 \ldots i_m}$ di $\boldsymbol{T}$ e quelle covarianti $U_{i_1 \ldots i_m}$ di $\boldsymbol{U}$, nel modo seguente:

$$I = \sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_m} T^{i_1 \ldots i_m} U_{i_1 \ldots i_m} .$$

In particolare, se $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}$, I rappresenta l'invariante quadratico del tensore m^plo^ $\boldsymbol{T}$, che per $m = 1$ è il quadrato del modulo del vettore.

49. - **Congruenze di linee nello spazio.** — Sia $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario, funzione regolare dei punti dello spazio; esso definisce una *congruenza di linee dello spazio,* definendo in ogni punto la tangente alla linea della congruenza passante per quel punto.

Si chiamerà $\boldsymbol{n}$ il *vettore della congruenza.* Le componenti cartesiane di $\boldsymbol{n}$ sono i coseni direttori delle tangenti alle linee della congruenza, cioè

$$\frac{dy_i}{ds},$$

se ds è l'elemento d'arco della congruenza; in coordinate generali $\boldsymbol{n}$ ha le componenti contravarianti [N. 36]

$$n^i = \frac{dx_i}{ds}, \tag{1}$$

che si sogliono chiamare anche *parametri della congruenza.*

Le componenti covarianti sono [N. 38, (2)]:

$$n_i = \sum_1^3{}_k a_{ik} n^k = \sum_1^3{}_k a_{ik} \frac{dx_k}{ds} . \tag{2}$$

Esse vengono anche denominate *momenti della congruenza.*

Se [N. 32]

$$ds^2 = \sum_1^3{}_{ik} a_{ik} dx_i dx_k \tag{3}$$

è l'espressione del quadrato dell'elemento lineare in coordinate generali, possiamo dedurre da (1) e (2) i parametri e i momenti delle tre congruenze di linee coordinate x_h. Chiameremo *linee* x_h quelle linee lungo le quali varia soltanto x_h ($x_{h+1} =$ cost, $x_{h+2} =$ cost; in queste $h = 1, 2, 3$ e si devono considerare equivalenti gli indici che differiscono fra loro di tre o di multipli di tre) e indicheremo con $\underset{h}{n}$ il vettore della congruenza delle linee x_h e con $\underset{h}{ds}$ l'elemento lineare corrispondente; quest'ultimo si deduce da (3) ponendo $dx_{h+1} = dx_{h+2} = 0$, si ottiene:

$$\underset{h}{ds}^2 = a_{hh}\, dx_h^2\,,$$

e convenendo di assumere sopra ogni linea x_h gli archi crescenti nel senso in cui cresce x_h, si può scrivere:

$$\underset{h}{ds} = \sqrt{a_{hh}}\, dx_h\,, \tag{4}$$

intendendosi il radicale positivo.

Per (4), da (1) si ottengono le seguenti espressioni per i parametri della congruenza delle linee x_h:

$$\underset{h}{n}^h = \frac{dx_h}{\underset{h}{ds}} = \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}}\,, \qquad \underset{h}{n}^{h+1} = 0 \tag{5}$$

e per i momenti, la (2) permette di dedurre:

$$\underset{h}{n}_i = a_{ih}\, n^h = \frac{a_{ih}}{\sqrt{a_{hh}}}\,. \tag{6}$$

Sieno ora n e N i vettori di due distinte e qualsivogliano congruenze di linee e si consideri l'invariante [N.[i] 48, 38]

$$I = \sum_1^3{}_i\, n_i\, \nu^i = \sum_1^3{}_i\, n^i\, \nu_i = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, \nu^i\, \nu^k = \sum_1^3{}_{ik}\, a^{ik}\, \nu_i\, \nu_k\,. \tag{7}$$

Il suo significato è [N. 48] di prodotto scalare $n \times$ N, cioè, trattandosi di vettori unitari, è

$$I = \cos\vartheta \tag{8}$$

chiamando ϑ l'angolo con cui si incontrano le linee delle due congruenze. In particolare, se vi è ortogonalità tra le due congruenze deve essere $I = 0$.

Applichiamo (7) a una coppia delle tre conguenze delle linee coordinate, per es. alle linee x_{h+1} e x_{h+2}; si ha:

$$\cos(x_{h+1}\, x_{h+2}) = \frac{a_{h+1\, h+2}}{\sqrt{a_{h+1\, h+1}\, a_{h+2\, h+2}}}\,. \tag{9}$$

Infatti, applicando in (8) e (7) le (5) e (6), si ottiene:

$$\cos(x_{h+1}\, x_{h+2}) = \sum_1^3{}_i \underset{h+1}{n_i} \underset{h+2}{n^i} = \underset{h+1}{n_h} \underset{h+2}{n^h} +$$

$$+ \underset{h+1}{n_{h+1}} \underset{h+2}{n^{h+1}} + \underset{h+1}{n_{h+2}} \underset{h+2}{n^{h+2}} = \frac{a_{h+1\, h+2}}{\sqrt{a_{h+1\, h+1}\, a_{h+2\, h+2}}}$$

c. v. d.

Scende da (9) che per l'ortogonalità delle tre congruenze di linee coordinate dev'essere $a_{h+1\, h+2} = 0$.

50. - **Componenti intrinseche di un vettore.** — Sia $\boldsymbol{n}$ il vettore di una congruenza di linee e $\boldsymbol{v}$ un vettore, di componenti covarianti v_i e contravarianti v^i; si ponga:

$$(1) \qquad \underset{n}{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = \sum_1^3{}_i v_i n^i = \sum_1^3{}_i v^i n_i = \sum_1^3{}_{ik} a_{ik} v^i n^k = \sum_1^3{}_{ik} a^{ik} v_i n_k .$$

L'invariante $\underset{n}{v}$ ha il significato [N. 48] di componente del vettore $\boldsymbol{v}$ secondo $\boldsymbol{n}$, cioè secondo le tangenti alle linee della congruenza di vettore $\boldsymbol{n}$.

In particolare, applichiamo (1) alla conguenza delle linee x_h, designando semplicemente $\underset{h}{v}$ (invece di $\underset{n_h}{v}$) la componente di $\boldsymbol{v}$ secondo le tangenti alle linee x_h si ha:

$$(2) \qquad \underset{h}{v} = \frac{v_h}{\sqrt{a_{hh}}} .$$

Infatti, da (1) si ricava, tenendo presente (5) del N. 49,

$$\underset{h}{v} = \boldsymbol{v} \times \underset{h}{\boldsymbol{n}} = \sum_1^3{}_i v_i \underset{h}{n^i} = v_h \underset{h}{n^h} + v_{h+1} \underset{h}{n^{h+1}} + v_{h+2} \underset{h}{n^{h+2}} = \frac{v_h}{\sqrt{a_{hh}}} ,$$

c. v. d.

Dunque i rapporti tra le componenti covarianti v_h del vettore $\boldsymbol{v}$ e $\sqrt{a_{hh}}$ sono invarianti e rappresentano le proiezioni ortogonali del vettore $\boldsymbol{v}$ secondo le tangenti alle linee coordinate; esse si chiamano *componenti intrinseche* del vettore $\boldsymbol{v}$ ed è per il loro carattere invariantivo che si sono indicate con l'indice sotto la lettera.

51. - **Componenti intrinseche di un tensore.** — Si abbia una terna di congruenze di linee, comunque prefissate. Potremo sempre assumere questa terna come riferimento e perciò indicheremo con $\underset{h}{n}$ $(h = 1, 2, 3)$ i corrispondenti vettori delle tre congruenze. Sieno T_{ik} le componenti covarianti, e T^{ik} quelle contravarianti, di un tensore doppio $\boldsymbol{T}$.

Poniamo

$$(1) \qquad \underset{ik}{T} = \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, T_{lm}\, \underset{i}{n}^{l}\, \underset{k}{n}^{m};$$

$\underset{ik}{T}$ sono, in generale, nove invarianti (tanti quanti sono T_{ik}) che si denominano *componenti intrinseche* del tensore doppio $\boldsymbol{T}$. Tenendo presenti (5) del N. 49, si può anche scrivere:

$$(2) \qquad \underset{ik}{T} = \frac{T_{ik}}{\sqrt{a_{ii}\, a_{kk}}}.$$

Vale la pena di far rilevare che agli invarianti $\underset{ik}{T}$ si giunge oltre che nel modo indicato da (1), anche nei modi indicati dalle seguenti eguaglianze:

$$\underset{ik}{T} = \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, T^{lm}\, \underset{i}{n}_{l}\, \underset{k}{n}_{m} = \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, T_{l}^{\cdot m}\, \underset{i}{n}^{l}\, \underset{k}{n}_{m} = \sum_{1}^{3}{}_{lm}\, T^{l}_{\cdot m}\, \underset{i}{n}_{l}\, \underset{k}{n}^{m}.$$

Se, in particolare, si applica (2) al tensore doppio simmetrico degli sforzi Φ [N. 20], avendosi:

$$(3) \qquad \underset{ik}{\Phi} = \frac{\Phi_{ik}}{\sqrt{a_{ii}\, a_{kk}}},$$

si deduce che $\underset{ik}{\Phi}$ rappresenta la componente ortogonale, secondo la linea x_k dello sforzo specifico che si esercita sopra un elemento superficiale normale alla linea x_i.

Si consideri ora, più in generale, un tensore m$^{\text{plo}}$ $\boldsymbol{T}$ di componenti covarianti $T_{i_1 \ldots i_m}$ e contravarianti $T^{i_1 \cdots i_m}$; ponendo:

$$(4) \qquad \underset{i_1 \ldots i_m}{T} = \sum_{1}^{3}{}_{k_1 \ldots k_m}\, T_{k_1 \ldots k_m}\, \underset{i_1}{n}^{k_1} \cdots \underset{i_m}{n}^{k_m},$$

si ottengono, in generale, 3^m invarianti (tanti quante sono le componenti covarianti, o contravarianti, del tensore $\boldsymbol{T}$) che si definiscono *componenti intrinseche* del tensore T. Per le (5) del N. 49 da (4) si ottiene più semplicemente:

$$(5) \qquad \underset{i_1 \dots i_m}{T} = \frac{T_{i_1 \dots i_m}}{\sqrt{a_{i_1 i_1} \cdots a_{i_m i_m}}}.$$

Si rilevi ancor qui come alla forma intrinseca delle componenti di T si possa giungere attraverso a una qualunque delle seguenti eguaglianze:

$$\underset{i_1 \dots i_m}{T} = \sum_1^3{}_{k_1 \dots k_m} T^{k_1 \dots k_m} \underset{i_1}{n_{h_1}} \cdots \underset{i_m}{n_{k_m}} =$$

$$= \sum_1^3{}_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_m} T_{k_1 \dots k_p}^{\quad\quad\;\; k_{p+1} \dots k_m} \underset{i_1}{n^{k_1}} \cdots \underset{i_p}{n^{k_p}} \underset{i_{p+1}}{n_{k_{p+1}}} \cdots \underset{i_m}{n_{k_m}}.$$

52. - **I coefficienti di rotazione di Ricci.** — Sieno $\underset{h}{n}$ $(h = 1, 2, 3)$ i vettori delle tre congruenze delle linee coordinate. Si considerino i tensori $\underset{h}{n'}$ derivati dei vettori $\underset{h}{n}$; le componenti covarianti di $\underset{h}{n'}$ sono [N. 45, (2)]:

$$(1) \qquad \underset{h}{n_{i|k}} = \frac{\partial \underset{h}{n_i}}{\partial x_k} - \sum_1^3{}_l \begin{Bmatrix} i\ k \\ l \end{Bmatrix} \underset{h}{n_l};$$

le componenti intrinseche di $\underset{h}{n'}$ sono invece [N. 51, (2)]:

$$(2) \qquad \underset{ik}{\overset{h}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{a_{kk} a_{ii}}} \underset{h}{n_{i|k}}.$$

Tenendo presente la (6) del N. 49, da (1) si ricava

$$\underset{h}{n_{i|k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{a_{ih}}{\sqrt{a_{hh}}} - \sum_1^3{}_l \begin{Bmatrix} i\ k \\ l \end{Bmatrix} \frac{a_{hl}}{\sqrt{a_{hh}}},$$

per cui, in definitiva (2) si può scrivere:

$$(3) \qquad \underset{ik}{\overset{h}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{a_{kk} a_{ii}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{a_{ih}}{\sqrt{a_{hh}}} - \sum_1^3{}_l \begin{Bmatrix} i\ k \\ l \end{Bmatrix} \frac{a_{hl}}{\sqrt{a_{hh}}} \right].$$

Se le tre congruenze di vettori $\underset{h}{n}$ sono ortogonali le componenti intrinseche γ sono note col nome di *coefficienti di rotazione di Ricci;* se, come noi abbiamo supposto, le congruenze sono quelle del sistema di riferimento, introducendo le condizioni di ortogonalità la (3) si semplifica ulteriormente.

Se le coordinate sono ortogonali si ha [N. 33]:

$$a = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}, \qquad a^{ii} = \frac{1}{a_{ii}}, \qquad a_{i+1\, i+2} = a^{i+1\, i+2} = 0,$$

e ancora [N. 45, (4')]

$$(\cdot) \qquad \begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} = a^{ll} \begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{ll}} \begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix},$$

per cui

$$\sum_1^3{}_l \begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} \frac{a_{hl}}{\sqrt{a_{hh}}} = \begin{Bmatrix} i & k \\ & h \end{Bmatrix} \sqrt{a_{hh}} = \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} \begin{bmatrix} i & k \\ & h \end{bmatrix}.$$

. Pertanto la (3) si può scrivere:

$$\underset{ik}{\overset{h}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}\, a_{kk}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{a_{ih}}{\sqrt{a_{hh}}} - \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} \begin{bmatrix} i & k \\ & h \end{bmatrix} \right];$$

si noti ancora che [N. 45, (6)]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{a_{ih}}{\sqrt{a_{hh}}} &= \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} \frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k} - \frac{a_{ih}}{2a_{hh}} \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} \frac{\partial a_{hh}}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_{hh}}} \left\{ \begin{bmatrix} i & k \\ & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & k \\ & i \end{bmatrix} \right\} - \frac{\delta_{ih}}{\sqrt{a_{hh}}} \begin{bmatrix} h & k \\ & h \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha dunque in definitiva:

$$(4) \qquad \underset{ik}{\overset{h}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}\, a_{kk}\, a_{hh}}} \left\{ \begin{bmatrix} h & k \\ & i \end{bmatrix} - \delta_{ih} \begin{bmatrix} h & k \\ & h \end{bmatrix} \right\}.$$

I coefficienti di rotazione godono della seguente proprietà emisimmetrica:

$$(5) \qquad \underset{ik}{\overset{h}{\gamma}} + \underset{hk}{\overset{i}{\gamma}} = 0,$$

da cui, in particolare,

$$(5') \qquad \underset{ik}{\overset{i}{\gamma}} = 0.$$

Infatti, sommando (4) con quella che da (4) si ottiene scambiando i con h si ha:

$$\underset{ik}{\overset{h}{\gamma}} + \underset{hk}{\overset{i}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}\, a_{hh}\, a_{kk}}} \left\{ \begin{bmatrix} h & k \\ & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & k \\ & h \end{bmatrix} - \delta_{ih} \left(\begin{bmatrix} h & k \\ & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & k \\ & i \end{bmatrix} \right) \right\},$$

e, per (6) e (7) del N. 45,

$$\underset{ik}{\overset{h}{\gamma}} + \underset{hk}{\overset{i}{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}\, a_{hh}\, a_{kk}}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ a_{ih} - \frac{1}{2} \delta_{ih} (a_{hh} + a_{ii}) \right\}.$$

Ora il secondo membro è nullo essendo sempre:

$$a_{ih} - \frac{1}{2}\,\delta_{ih}\,(a_{hh} + a_{ii}) = 0,$$

perchè: o è $i \neq h$ ed allora $a_{ih} = \delta_{ih} = 0$ (essendo coordinate ortogonali), o è $i = h$ ed allora $\delta_{ih} = 1$ e la precedente risulta identicamente soddisfatta. Dunque vale (5), c. v. d.

53. - **Derivazione intrinseca**. — Abbiamo stabilito nel N. 46 le formule di derivazione covariante e quelle di derivazione contravariante, nelle quali compaiono rispettivamente le componenti covarianti e quelle contravarianti, del tensore $\boldsymbol{T}$ e del suo derivato $\boldsymbol{T}'$. Vogliamo ora esprimere le componenti intrinseche del tensore $\boldsymbol{T}'$ mediante quelle pure intrinseche del tensore $\boldsymbol{T}$.

Per maggiore semplicità cominciano a considerare il caso di un tensore semplice, o vettore. Chiamando $\underset{i}{T}$ le sue componenti intrinseche per il tensore doppio $\boldsymbol{T}'$ derivato da $\boldsymbol{T}$ si hanno le seguenti componenti intrinseche:

$$\underset{i|k}{T} = \frac{\partial T_i}{\underset{h}{\partial s}} + \sum_{1}^{3}{}_l\, \underset{ik}{\overset{l}{\gamma}}\, \underset{l}{T}, \tag{1}$$

essendo $\underset{h}{\partial s}$ l'elemento di linea x_k.

Infatti, le componenti covarianti del tensore derivato $\boldsymbol{T}'$ sono [N. 45, (2)]:

$$T_{i|k} = \frac{\partial T_i}{\partial x_k} - \sum_{1}^{3}{}_l \begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} T_l\,;$$

ma, per (2) del N. 51 e del N. 50, si ha:

$$T_{i|k} = \underset{i|k}{T}\,\sqrt{a_{ii}\,a_{kk}}\,, \qquad T_i = \underset{i}{T}\,\sqrt{a_{ii}}\,,$$

per cui, sostituendo, e dividendo per $\sqrt{a_{ii}\,a_{kk}}$,

$$\underset{i|k}{T} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}\,a_{hh}}} \left\{ \frac{\partial \underset{i}{T}}{\partial x_k}\sqrt{a_{ii}} + \underset{i}{T}\,\frac{\partial\sqrt{a_{ii}}}{\partial x_k} - \sum_{1}^{3}{}_l \begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix} \underset{l}{T}\,\sqrt{a_{ll}} \right\},$$

ma è [N. 49, (4)]

$$\sqrt{a_{kk}}\;dx_k = \underset{k}{ds}\,,$$

per cui, ricordando (*) di pag. 84,

$$\underset{i|k}{T} = \frac{\partial \underset{i}{T}}{\underset{k}{\partial s}} + \frac{1}{\sqrt{a_{ii}\,a_{kk}}} \left\{ \underset{i}{T}\,\frac{\partial\sqrt{a_{ii}}}{\partial x_k} - \sum_{1}^{3}{}_l\,\frac{1}{\sqrt{a_{ll}}} \begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} \underset{l}{T} \right\}$$

e notando che [N. 45, (6)]

$$\frac{\partial\sqrt{a_{ii}}}{\partial x_k}=\frac{1}{2\sqrt{a_{ii}}}\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_k}=\frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}\begin{bmatrix} i & k \\ & i \end{bmatrix}$$

si ottiene sostituendo

$$\underset{i|k}{T}=\frac{\partial \underset{i}{T}}{\partial \underset{k}{s}}+\sum_{1}^{3}{}_{l}\,\underset{l}{T}\,\frac{1}{\sqrt{a_{ii}\,a_{kk}\,a_{ll}}}\left(\delta_{il}\begin{bmatrix} i & k \\ & i \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix}\right),$$

da cui, per (4) del N. 52, si ottiene senz'altro la (1), c. v. d.

La (1) chiamasi formula di ***derivazione intrinseca.***

Confrontando la (1) colla (2) del N. 45, che esprime la derivazione covariante, si vede che i coefficienti di rotazione tengono, nella derivazione intrinseca lo stesso posto dei simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie nella derivazione covariante.

È facile la estensione della (1) al caso di derivazione di un tensore m^plo $\boldsymbol{T}$; se $\underset{i_1\dots i_m}{T}$ sono le sue componenti intrinseche [N. 51] le componenti intrinseche $\underset{i_1\dots i_m|k}{T}$ del suo tensore derivato $\boldsymbol{T}'$ sono:

$$\underset{i_1\dots i_m|k}{T}=\frac{\partial}{\partial \underset{k}{s}}\underset{i_1\dots k_m}{T}+\sum_{1}^{m}{}_{\mu}\sum_{1}^{3}{}_{l}\,\underset{i_\mu k}{\overset{}{\gamma_{l}}}\;\underset{i_1\dots i_{\mu-1}\,l\,i_{\mu+1}\dots i_m}{T}. \tag{2}$$

Per la deduzione di questa formula basta applicare la (5) del N. 46 al tensore $\boldsymbol{T}$; tener conto delle (5) del N. 51 e seguire il medesimo procedimento specificato nel caso di $m=1$.

APPENDICE

Numeri - Vettori - Tensori (*).

Un rapido cenno sulla evoluzione dei numeri. Il campo primitivo è costituito dai numeri naturali:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots\ldots$$

Se a e b sono due qualunque di questi, tra essi si trova sempre il numero $a + b$ e il numero $a \cdot b$: le operazioni di addizione e di moltiplicazione sono sempre possibili nel campo dei numeri naturali. Non è sempre possibile l'operazione di sottrazione $a - b$, precisamente non è possibile quando $a = b$, e quando $a < b$.

L'introduzione dello zero e dei numeri negativi rende possibile l'operazione di sottrazione anche nei casi esclusi; il campo dei numeri si è così allargato:

$$\ldots\ -5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots$$

È il campo dei numeri *interi*. In questo campo sono sempre possibili le operazioni di addizione, di moltiplicazione e di sottrazione. L'operazione di divisione a/b è in tale campo possibile solamente quando a è multiplo di b; la introduzione dei numeri fratti (positivi e negativi) rende possibile l'operazione in ogni caso, $b = 0$ escluso. Il nuovo campo così ottenuto è il campo *razionale*. Va da sè che ad ogni nuova estensione continuano ad essere soddisfatte tutte le regole fondamentali vigenti nel campo precedente. Nel campo

---

(*) Esposizione fatta al Sindacato Provinciale Fascista Ingegneri di Milano la sera del 21 Giugno 1928 - VI.

razionale sono dunque possibili in ogni caso le operazioni di addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione; eccezion fatta la divisione per zero (*).

Ma nel campo razionale non trovano posto numeri notevoli, come il numero che misura il rapporto tra la diagonale del quadrato ed il suo lato ($\sqrt{2}$), il rapporto tra la diagonale del cubo e il suo spigolo ($\sqrt{3}$), il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, ecc. Dunque la necessità di allargare anche il campo razionale colla introduzione dei numeri *irrazionali*: il nuovo campo così raggiunto è il campo *reale*. Con quest' ultima estensione sembrava di aver raggiunto ciò che di più perfetto si potesse sperare per le comuni applicazioni. Ed in vero per i bisogni della realtà ci si potrebbe senz' altro fermare al campo reale ignorando ulteriori estensioni.

Se non che — e non al solo matematico — si presenta spontanea la domanda: nel campo reale sono possibili tutte le operazioni? È ben noto che la risposta è negativa, basta pensare alla operazione di estrazione di radice di indice pari da un numero negativo, per es. $\sqrt{-2}$, che non esiste tra i numeri reali. E, si badi bene, non è l' unica operazione impossibile nel campo reale, altre ve ne sono di meno elementari come il calcolo del logaritmo di un numero negativo, l' arco seno e l' arco coseno di argomenti maggiori dell' unità in valore assoluto, ecc.

Come si rendono possibili tali operazioni? Ancora una volta coll' allargare il campo dei numeri reali e cioè coll' introduzione: dell' unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$, dei numeri immaginari puri, cioè del tipo $i\,b$, con b reale e infine dei numeri del tipo $a + i\,b$, con a pure reale, detti *complessi*. Corrispondentemente venne denominato *complesso* il campo così ottenuto, che comprende come caso particolare il campo reale.

Viene fatto a questo punto di chiedersi: il passaggio dal campo reale al campo complesso constituisce una semplice soddisfazione dello spirito matematico o può avere altresì applicazioni concrete? Credo che gli elettrotecnici qui presenti mi dispenseranno senza dubbio dal dare la risposta: essi che già da parecchio tempo sanno fare uso sagace delle quantità complesse per rappresentare analiti-

---

(*) Si può rilevare che alla nozione di divisione per zero si può giungere solamente attraverso il concetto di limite e cioè come $\lim a/b = \infty$ per $b \longrightarrow 0$.

Così pure se anche $a = 0$: in tal caso si ha la forma indeterminata $^0/_0$.

camente i fenomeni di carattere periodico che sono a loro sì famigliari!

Si può ancora allargare il campo dei numeri al di là del campo complesso? Si può rispondere no se si vogliono mantenere integre tutte le proprietà formali delle operazioni del campo complesso. L'estensione è possibile a patto di rinunciare almeno a una di tali proprietà.

Sembra dunque che si sia raggiunto il grado di perfezione richiesto, constatato che tutte le operazioni formali, finora note, sono possibili nel campo complesso.

Se per la misura di rapporti di grandezze omogenee basta il solo numero, vi sono degli enti meccanici e fisici, la cui valutazione non dipende da un *solo* numero, ma da *gruppi* di numeri. L'esempio più semplice è offerto dai *vettori*.

Chi non ricorda l'immagine altamente espressiva di vettore per rappresentare una forza? La lunghezza, o modulo del vettore, fornisce la misura della sua intensità, la direzione e il verso danno l'orientazione della forza stessa.

Il vettore non è che l'immagine geometrica di un ente la cui misurazione, rispetto a una lunghezza unitaria prefissata, è data da tre numeri e precisamente dalle componenti, per esempio cartesiane, del vettore. Il vettore (spaziale) (*) è dunque in corrispondenza biunivoca con tre numeri, cioè ad ogni vettore (considerato nello spazio) corrispondono sempre tre numeri: le componenti cartesiane rispetto a un sistema prefissato e viceversa dati tre numeri (e un sistema di riferimento) ad essi corrisponde sempre un determinato vettore, quello che li ammette come sue componenti.

Forze, spostamenti, impulsi, velocità, accelerazioni, quantità di moto, momenti, sono elementi meccanici e fisici che trovano la loro naturale rappresentazione mediante vettori. In sostanza non vi è differenza nella considerazione dell'ente geometrico vettore da quella del gruppo dei tre numeri o componenti che lo rappresentano. Ma quanta semplicità e naturalezza nel concepire gli enti accennati come vettori! Dicesi: spostati di tanti passi nella tal direzione, e non già: fammi uno spostamento di componenti, 1, — 2, 3! La designazione spontanea è squisitamente vettoriale!

(*) Per vettori di un piano si hanno due sole componenti, in tal caso si ha corrispondenza biunivoca tra vettori e coppie di numeri.

La concezione vettoriale è poi assoluta, intendo dire indipendente dal sistema di riferimento. Se riferiamo lo stesso vettore a due differenti terne cartesiane le due terne di componenti di quel vettore sono distinte. Chiamiamo v_k (per $k = 1, 2, 3$) le componenti di un vettore v rispetto a una terna cartesiana $0, y_1, y_2, y_3$ e indichiamo con $\overline{v}_i$ ($i = 1, 2, 3$) le componenti dello stesso vettore rispetto a un'altra terna cartesiana $\overline{0}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$, comunque prefissata; si hanno le note formule:

$$\overline{v}_i = \sum_{1}^{3}{}_k \, v_k \, \alpha_{ki} , \tag{1}$$

essendo

$$\alpha_{ki} = \cos (y_k \, \overline{y}_i) ,$$

che legano tra di loro linearmente le componenti del vettore v con riferimento alle due distinte terne cartesiane, i coefficienti dipendendo esclusivamente dall'orientamento reciproco delle due terne. È la (1) relazione fondamentale che esprime il modo di variare delle tre componenti di un vettore col variare del sistema di riferimento. La rappresentazione cartesiana del vettore (terna di componenti) è diversa se diversi sono i sistemi di riferimento, ma il vettore è sempre lo stesso.

*

Questo concetto si può estendere a enti rappresentati da più di tre numeri o componenti. Per maggior chiarezza giova di far precedere la impostazione della questione da una chiara intuizione fisica che ha contribuito alla denominazione di « *tensori* » attribuita agli enti di cui vogliamo discorrere.

Immaginiamo un corpo elastico, che dallo stato naturale venga portato ad uno stato di equilibrio, sotto coazione elastica, mediante una qualsiasi sollecitazione esterna, atta naturalmente a mantenerlo in equilibrio. Com'è noto si desta in ogni punto, uno stato di deformazione, caratterizzato analiticamente dalle sei caratteristiche di deformazione (tre allungamenti unitari e tre scorrimenti) e uno stato di tensione, caratterizzato in ogni posto da tre sforzi normali e da tre sforzi tangenziali. Per rappresentare tanto lo stato di deformazione quanto quello di tensione ci si riferisce naturalmente ad una terna cartesiana nello spazio: quindi tanto le sei caratteristiche di deformazione quanto le sei caratteristiche dello stato di tensione sono intimamente legate al particolare riferimento cartesiano. Eppure noi tutti abbiamo la sensazione che tanto lo stato di deformazione quanto lo stato di tensione sono indipendenti dal sistema di riferimento. La deformazione e la tensione sono dipendenti dalla particolare costituzione geometrica, materiale ed elastica del corpo e dalla sollecitazione esterna a cui il corpo è sottoposto. Le caratteristiche di deformazione e quelle di tensione ci offrono un modo di misurare i due stati di deformazione e di tensione; un altro modo si avrà riferendosi ad un altro sistema cartesiano: avremo allora altri valori per le sei caratteristiche di deformazione e per le sei caratteristiche di tensione, ma i nuovi valori corrispondono ai medesimi stati di deformazione e di tensione. Dunque due enti autonomi, cioè indipendenti dal sistema di riferimento: il *tensore di deformazione* e il *tensore degli sforzi*, dei quali le sei caratteristiche, corrispondenti a ciascuni di essi, si possono chiamare le *componenti cartesiane.*

Ciò premesso, si definisce *tensore doppio* l'ente T rappresentato cartesianamente dal gruppo di nove numeri T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ che si denominano le *componenti cartesiane* del tensore T.

Di fronte a un cambiamento di assi cartesiani $(\overline{0}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$, cambiano le componenti del tensore T; esse risultano definite mediante le precedenti T_{ik} dalle relazioni:

$$\overline{T}_{jh} = \sum_{ik}^{3}{}_{1} T_{ik}\, a_{ij}\, a_{kh}\,. \tag{2}$$

È istruttivo il confronto tra queste e le (1) che si riferiscono a un vettore. Se $T_{ki} = T_{ik}$ il tensore dicesi *simmetrico*. Sono appunto simmetrici i due tensori di deformazione e degli sforzi, considerati precedentemente. Se $T_{ki} = - T_{ik}$ il tensore dicesi *emisimmetrico.*

Un altro tensore doppio simmetrico, di notevole significato meccanico, è il *tensore d'inerzia.* La forma più semplice delle sue componenti cartesiane si ottiene assumendo un sistema di riferimento coll'origine nel baricentro di un assegnato sistema di masse e gli assi y_1, y_2, y_3 coincidenti cogli assi principali d'inerzia. Chiamando I^0_{kk} i momenti principali d'inerzia relativi al baricentro, il tensore d'inerzia in un punto di coordinate y_k $(k = 1, 2, 3)$ ha le seguenti componenti:

$$I_{kk} = I^0_{kk} + M(y^2_{k+1} + y^2_{k+2}), \qquad I_{k+1\,k+2} = - M y_{k+1}\, y_{k+2}\,,$$

designando M la massa totale; in queste formule si deve porre successivamente $k = 1, 2, 3$ e considerare equivalenti gli indici che differiscono tra loro di 3, oppure di multipli di 3. I_{kk} ha il significato di momento d'inerzia delle masse rispetto all'asse parallelo all'asse y_k e passante per il punto di coordinate y_1, y_2, y_3 e $I_{k+1\,k+2}$ è l'opposto del prodotto d'inerzia relativo alla coppia di direzioni degli assi y_{k+1} e y_{k+2}.

È facile ora estendere le considerazioni fatte per i tensori doppi a tensori di ordine superiore. Così le componenti cartesiane di un tensore triplo T dovranno rappresentarsi colla stessa lettera munita di tre indici: T_{ijk} designando i, j, k una qualunque delle $3^3 = 27$ disposizioni con ripetizione degli indici 1, 2, 3.

Di fronte a un cambiamento di assi le componenti rispetto al nuovo sistema di riferimento $(\overline{0}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ sono:

$$\overline{T}_{pqr} = \sum_{ijk}^{3}{}_{1} T_{ijk}\, \alpha_{ip}\, \alpha_{jq}\, \alpha_{kr}. \tag{3}$$

(Confrontare con (1) e (2)). Se il tensore è simmetrico sono identiche le componenti che differiscono soltanto per l'ordine degli indici, per cui il numero delle componenti distinte eguaglia quello delle combinazioni con ripetizione a tre a tre degli indici 1, 2, 3, cioè 10.

In generale, un tensore m^plo^ T avrà 3^m componenti cartesiane $T_{i_1 \ldots i_m}$ tante essendo le disposizioni con ripetizione di 1, 2, 3. Se il tensore è simmetrico, cioè sono identiche le componenti che differiscono soltanto per l'ordine degli indici, il numero delle componenti distinte si riduce a $\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Cambiando sistema di riferimento le nuove componenti sono:

$$\overline{T}_{j_1 \ldots j_m} = \sum_{i_1 \ldots i_m}^{3}{}_{1} T_{i_1 \ldots i_m}\, \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_m j_m}. \tag{4}$$

La (1) e la (2) sono contenute in questa e corrispondono al caso di $m = 1$, e di $m = 2$. Si noti che se sono nulle le componenti di un tensore rispetto a un sistema di riferimento sono nulle anche le componenti rispetto a un qualunque altro sistema di riferimento, cioè il tensore è *nullo*. Si è già rilevato che per $m = 1$ si ha il caso del vettore; dunque in questa teoria il vettore si può considerare come un tensore *semplice*. Un numero solo si può ritenere corrispondere a $m = 0$, cioè a un tensore di ordine *zero*. Esempi semplici di tensori simmetrici di ordine qualunque si ottengono partendo da una funzione $f(y_1, y_2, y_3)$ che costituisce, per quanto ora dicemmo, un tensore di ordine zero. Le sue derivate prime $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ si possono interpretare come componenti cartesiane di un vettore: il grad f; le derivate seconde, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_k}$, definiscono cartesianamente un tensore doppio simmetrico; e così via; le derivate m^{me}, $\dfrac{\partial^m f}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_m}}$, sono le componenti cartesiane di un tensore m^{plo} simmetrico.

Un interessante tensore triplo emisimmetrico è il tensore E le cui componenti cartesiane sono così definite: $\varepsilon_{ijk} = 0$ se i, j, k non sono tutte distinte ed $=$ all' unità positiva oppure all' unità negativa secondochè i, j, k presentano un numero pari oppure dispari di inversioni rispetto a 1, 2, 3. Il tensore E gode della notevole proprietà che le sue componenti cartesiane sono invariantive cioè sono indipendenti dal sistema di riferimento, per cui:

$$\bar{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}.$$

Il tensore è *emisimmetrico* perchè lo scambio di due indici da luogo a cambiamento di segno della componente.

Una analoga proprietà gode il tensore doppio simmetrico Δ le cui componenti cartesiane sono:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \text{ è diverso da } k, \\ 1, & \text{se } i = k. \end{cases}$$

Nel cambiamento del sistema di riferimento si ha ancor qui

$$\bar{\delta}_{ik} = \delta_{ik},$$

cioè le componenti sono invariantive. Questa proprietà dei tensori E e Δ non trova alcun riscontro nei vettori. Essa fa pensare a una specie di proprietà analoga a quella di una sfera di essere cioè egualmente orientata rispetto a una qualunque terna cartesiana coll' origine nel suo centro.

Esiste per i tensori un calcolo, naturalmente più esteso di quello dei vettori, sul quale non è qui opportuno mi soffermi, anche perchè un rapido esame sarebbe troppo incompleto. Accennerò soltanto, in un caso di particolare interesse applicativo, alla operazione di *composizione dei tensori.*

È noto che, per le piccole deformazioni dei solidi elastici, lo stato di tensione è funzione lineare, omogenea dello stato di deformazione, cioè le sei componenti $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$ del tensore degli sforzi Φ sono funzioni lineari e omogenee delle sei componenti $\xi_{jh} = \xi_{hj}$ del tensore di deformazione Ξ; il che si può specificare scrivendo:

$$\Phi_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, c_{ik,jh}\, \xi_{jh}\,,$$

dove i coefficienti $c_{ik,jh}$ sono, in generale, in numero di 36 distinti.

Questi coefficienti si possono interpretare come componenti di un tensore quadruplo c, da denominarsi *tensore elastico* in quanto che dipende unicamente dalle qualità elastiche del solido. Orbene la relazione soprascritta esprime che il tensore degli sforzi si ottiene dalla composizione del tensore elastico col tensore di deformazione. Si tratta di una locuzione alquanto espressiva per far rilevare che lo stato di tensione dipende dal connubio dello stato di deformazione colla natura elastica del solido. Si noti che un tensore quadruplo generale ha $3^4 = 81$ componenti cartesiane. Nel caso di un tensore elastico il numero delle componenti distinte si riduce, come dissi, a 36.

Che se si introduce l'ipotesi che le forze elastiche sieno conservative, cioè ammettano una funzione potenziale — *potenziale elastico* — il numero delle componenti distinte si riduce a 21. Tale numero si riduce poi ulteriormente se il corpo elastico ammette piani o assi di simmetria, come nei corpi cristallini, fino a ridursi a due soli distinti nel caso della isotropia completa.

E qui chiudo pago se sarò riuscito a fornire qualche idea del concetto di tensore e del suo manifesto intervento in questioni che interessano da vicino anche l'ingegnere.